УДК 514

РЕКУРСИВНИЙ МЕТОД ОБЧИСЛЕННЯ ДОВЖИНИ ДОВІЛЬНОЇ ПАРАМЕТРИЧНОЇ КРИВОЇ

Вірченко Г.А., к.т.н.
Національний технічний університет України "КПІ"
Тел. (044) 406-82-43

***Анотація* – у статті подано спосіб визначення довжини довільної параметричної кривої шляхом використання рекурсивних обчислювальних процедур, що базуються на структурно-параметричному підході до геометричного моделювання.**

***Ключові слова* – алгоритм, геометричне моделювання, комп'ютерні інформаційні технології, параметрична крива, рекурсія, структурно-параметричний підхід.**

Постановка проблеми. Нині в системах автоматизованого геометричного моделювання широко застосовуються різноманітні фігури в параметричній формі [1-4], такі як криві, поверхні тощо.

Тому в наш час доволі актуальними є задачі всебічного покращення існуючих алгоритмів комп'ютерного опрацювання зазначених об'єктів.

Аналіз досліджень і публікацій. В [1, 3] на достатньо високому рівні викладено питання формоутворення з використанням параметричних кривих і поверхонь.

Проте обчислювальним методам, способам і прийомам розрахунків таких важливих характеристик як довжини, площі та об'єми не приділено достатньої уваги навіть у літературних джерелах [2, 4], що присвячені аналізу геометричних алгоритмів.

Перспективним напрямком у комп'ютерній графіці є структурно-параметрична методологія [5, 6], яка здатна суттєво підвищувати ефективність інформаційних технологій.

Формулювання цілей статті. Запропонувати нову методику, що базується на структурно-параметричних прийомах апроксимації, для обчислення довжини довільної параметричної кривої.

Основна частина. Розглядатимемо далі лінію, координати радіуса-вектора r якої у прямокутній декартовій системі $Oxyz$ формуються аналітичними функціями параметра u

$$r = (x, y, z) = r(u) = x(u)\, i + y(u)\, j + z(u)\, k, \quad u \in [u_{min}, u_{max}]. \qquad (1)$$

На підставі принципу системного підходу поставлену задачу розв'язуватимемо шляхом поділу вихідного об'єкта (кривої) на більш прості елементи (її дуги).

Критерієм завершення даного процесу є досягнення потрібної точності, що реалізується одержанням належних різниць між довжинами поточних дуг вихідної кривої та апроксимуючими їх хордами, тобто прямолінійними відрізками, які сполучають кінці дуг.

За довжину L лінії (1) вважатимемо, з визначеною точністю ε, суму довжин l_i апроксимуючих її хорд.

У програмуванні рекурсивними називають процедури (підпрограми, функції тощо), які можуть звертатися самі до себе.

Запропонований рекурсивний обчислювальний модуль у якості вхідних аргументів містить значення параметра на кінцях поточної дуги лінії (1), де спочатку це u_{min} та u_{max}, і, в залежності від дотримання чи ні необхідної точності апроксимації, відповідно додає наявну довжину хорди l_i до підсумкового значення L або ділить проміжок змінювання параметра u на дві частини, чим реалізує утворення двох нових дуг, і викликає для них знову проаналізовану процедуру.

У результаті описаного процесу формується ієрархічне бінарне дерево, кінцевим вершинам якого відповідають дуги досліджуваної кривої з певними діапазонами зміни параметра $u \in [u_{i-1}, u_i]$ та довжинами хорд l_i, котрі з потрібною точністю апроксимують ці дуги.

Якщо кількість останніх позначити через n, то

$$L = \sum_{i=1}^{n} l_i, \;\; l_i = |r_i - r_{i-1}|, \;\; r_{i-1} = r(u_{i-1}), \;\; r_i = r(u_i);$$

$$\Delta u = u_{max} - u_{min} = \sum_{i=1}^{n} \Delta u_i, \;\; \Delta u_i = u_i - u_{i-1}. \qquad (2)$$

Ключовим моментом розглянутих прийомів геометричного моделювання є дотримання належної точності апроксимації кожної з поточних дуг ($u \in [u_{i-1}, u_i]$, $i \in \{1, \ldots, n\}$).

Для цього може бути вжито $N_m = 2^s - 1$, де $s \in N$, контрольних точок, які рекомендується розміщувати вздовж опрацьовуваної дуги згідно наступних величин її параметра

$$u_m = u_{i-1} + (0{,}5 + \frac{(-1)^m [m/2] + qm}{N_m + 1}) \cdot (u_i - u_{i-1}), \; |q| < 1/N_m, \; m \in \{1, \ldots, N_m\}. \quad (3)$$

Вираз (3) дозволяє генерувати точки для контролю відхилень апроксимуючої хорди від поточної дуги, починаючи приблизно з середини останньої, як найімовірнішого розташування шуканої максимальної похибки.

Приріст значення m сприяє підвищенню якості виконаної апроксимації, проте збільшує тривалість розрахунків. Ненульову величину сталої q доцільно застосовувати під час обробки періодичних кривих.

Обчислення відхилення для конкретної контрольної точки може бути виконано кількома способами. Подамо два з них.

Спільною в цих випадках є дефініція, згідно (2), необхідної точності апроксимації поточної дуги

$$\varepsilon_i = \frac{\Delta u_i}{\Delta u} \varepsilon,$$

оскільки тоді $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = \varepsilon$.

У першому разі задовільним результатом вважатимемо дотримання умови

$$l_{i1} + l_{i2} - l_i < \alpha \varepsilon_i, \tag{4}$$

де $l_{i1} = \left| r(u_m) - r_{i-1} \right|$, $l_{i2} = \left| r(u_m) - r_i \right|$, $0 < \alpha < 1$.

Геометричний зміст виразу (4) полягає в тому, що $l_{i1} + l_{i2}$ значно точніше апроксимує поточну дугу, ніж l_i, але числом, що завжди менше істинної її довжини. Останній факт враховується коефіцієнтом α.

Певним недоліком розглянутого способу є потреба використання квадратних коренів для знаходження l_{i1} та l_{i2}.

У другому випадку квадрат довжини перпендикуляра від контрольної точки $r(u_m)$ до хорди $r_{i-1} r_i$ обчислюється за формулою

$$h_m^2 = \frac{((r(u_m) - r_{i-1})\, x\, (r_i - r_{i-1}))^2}{(r_i - r_{i-1})^2}. \tag{5}$$

Вираз (4) забезпечення необхідної точності апроксимації записується як

$$\begin{cases} l_{i1} - \tilde{l}_{i1} < \alpha k \varepsilon_i, \\ l_{i2} - \tilde{l}_{i2} < \alpha (1 - k) \varepsilon_i, \end{cases} \tag{6}$$

де $\tilde{l}_{i1} = k l_i$, $\tilde{l}_{i2} = (1 - k) l_i$, $0 < k < 1$. Значення коефіцієнта k визначається положенням основи перпендикуляра, опущеного з $r(u_m)$ до хорди $r_{i-1} r_i$.

Застосувавши (5), систему (6) подаємо у вигляді більш жорстких обмежень

$$\begin{cases} h_m < \alpha k \varepsilon_i, \\ h_m < \alpha(1-k)\varepsilon_i. \end{cases} \qquad (7)$$

Додавши нерівності (7) та піднісши до квадрата результат, одержуємо

$$h_m^2 < \alpha^2 \left(\frac{\varepsilon_i}{2} \right)^2. \qquad (8)$$

Залежності (5) та (8) дозволяють здійснювати контроль точності апроксимації поточної дуги кривої (1) без залучення коренів, що сприяє підвищенню обчислювальної швидкодії алгоритмів.

Проте, грубий характер обмежень (7) забезпечує протилежну тенденцію, оскільки за рахунок достатньо малих значень у правій частині (8) суттєво зростає кількість дуг, які аналізуються.

Тому існує можливість не тільки відмови в останній формулі від коефіцієнта α, а й застосування його величин, що більші за одиницю.

Однак з'ясування поданих нюансів потребує проведення подальших теоретичних і практичних досліджень у даному напрямку.

На завершення статті акцентуємо увагу на структурно-параметричному характері поданої методики, що виявляється у вживаних способах і прийомах апроксимації, виконанні контрольних заходів, варіантах здійснення розрахунків і т. д.

Висновки. Наведені модифікації запропонованого методу обчислення довжини довільної параметричної кривої реалізують можливості:

- обрання найкращих різновидів згідно наявних конкретних умов використання;

- комплексного застосування у складі інтегрованих програмних модулів;

- підвищення гнучкості, потужності та ефективності сучасних комп'ютерних інформаційних технологій.

Подані прийоми поширюються й на визначення інших характеристик геометричних об'єктів, таких як площа, об'єм тощо та розв'язування інших задач.

Література

1. *Фокс А.* Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве: Пер. с англ. / Фокс А., Пратт М. – М.: Мир, 1982. – 304 с.

2. *Препарата Ф.* Вычислительная геометрия: Введение: Пер. с англ. / Препарата Ф., Шеймос М. – М.: Мир, 1989. – 478 с.
3. *Роджерс Д.* Математические основы машинной графики: Пер. с англ. / Роджерс Д., Адамс Дж. – М.: Мир, 2001. – 604 с.
4. *Никулин Е.А.* Компьютерная геометрия и алгоритмы машинной графики / *Никулин Е.А.* – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 560 с.
5. *Ванін В.В.* Визначення та основні положення структурно-параметричного геометричного моделювання / Ванін В.В., Вірченко Г.А. // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Вип. 23. – Харків: ХДУХТ, 2009. – С. 42-48.
6. *Вірченко Г.А.* Структурно-параметричний підхід як засіб удосконалення геометричних алгоритмів / Вірченко Г.А. // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Вип. 26. – Харків: ХДУХТ, 2010. – С. 81-84.

РЕКУРСИВНЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ДЛИНЫ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ КРИВОЙ

Вирченко Г. А.

Аннотация

В статье представлен способ определения длины произвольной параметрической кривой с помощью применения рекурсивных вычислительных процедур, которые основываются на структурно-параметрическом подходе к геометрическому моделированию.

RECURSIVE METHOD OF LENGTH EVALUATION OF AN ARBITRARY PARAMETRIC CURVE

G. Virchenko

Summary

The article presents a way to determine the length of an arbitrary parametric curve by using recursive computational procedures based on structural-parametric approach to geometric modelling.