

В. В. ВАНІН, В. В. ПЕРЕВЕРТУН,
Т. М. НАДКЕРНИЧНА, Г. Г. ВЛАСЮК

ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА

Затверджено Міністерством освіти і науки України як підручник для студентів
вищих навчальних закладів, які навчаються за напрямками
«Комп'ютерні науки», «Комп'ютерна інженерія»,
«Системна інженерія»

Серія «ІНФОРМАТИКА»
За загальною редакцією академіка НАН України
М. З. Згуровського

Київ
Видавнича група ВНУ
2009

ББК 30 11я73
В17
УДК 744 41(075 8)

Рецензенти Ю М Ковальов, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри прикладної геометрії та комп'ютерної графіки Національного авіаційного університету,
С Ф Пилипака, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри нарисної геометрії, комп'ютерної графіки та дизайну Національного аграрного університету

*Гриф надано Міністерством освіти і науки України,
лист № 14/18-Г-2168 від 23 10 2008 р*

Ванін В. В., Перевертун В. В., Наджернична Т. М., Власюк Г. Г.

В17 Інженерна графіка — К Видавнича група BHV, 2009 — 400 с іл
ISBN 966-552-168-3

Розглядаються основні питання нарисної геометрії як бази геометричного комп'ютерного моделювання об'єктів. Подаються відомості щодо оформлення конструкторської та програмної документації. Наведено приклади оформлення креслеників деталей, складальних креслеників, схем та інших конструкторських документів. Після кожного розділу подаються запитання та вправи для самоперевірки.

Призначений для студентів технічних спеціальностей, навчання яких пов'язано з вивченням радіоелектронної апаратури, зокрема студентів, що навчаються за напрямками «Комп'ютерні науки», «Комп'ютерна інженерія», «Системна інженерія», а також для студентів електротехнічних, радіотехнічних та приладобудівних спеціальностей.

ББК 30.11я73

Усі права захищені. Жодна частина цієї книжки не може бути відтворена в будь-якій формі без письмового дозволу власника авторських прав.

Інформація, що міститься в цьому виданні, отримана з джерел, які видавництво вважає надійними. Проте, маючи на увазі людські та технічні помилки, видавництво не може гарантувати абсолютну точність та повноту відомостей, викладених у цій книжці, і не несе відповідальності за можливі помилки, пов'язані з їх використанням.

Стислий зміст

Передмова	9
-----------------	---

Частина 1

Основи нарисної геометрії

Розділ 1. Предмет і метод нарисної геометрії. Геометричне моделювання у прямокутних проекціях	12
Розділ 2. Алгоритми розв'язання позиційних та метричних задач геометрії	31
Розділ 3. Моделювання кривих ліній та поверхонь	60
Розділ 4. Алгоритми розв'язання задач перетину поверхонь площинами, прямими та між собою	85
Розділ 5. Аксонометричні проекції	112

Частина 2

Технічне креслення

Розділ 6. Загальні положення розроблення та оформлення конструкторської документації	120
Розділ 7. Загальні вимоги до оформлення конструкторських документів	136
Розділ 8. Виконання креслеників деталей	188
Розділ 9. Зображення з'єднань деталей	241
Розділ 10. Специфікація та кресленики складаних одиниць	270
Розділ 11. Виконання креслеників деяких виробів радіоелектронної апаратури	293
Розділ 12. Схеми	317
Розділ 13. Правила виконання електричних схем цифрової обчислювальної техніки	349
Розділ 14. Оформлення програмної документації	367
Перелік нормативних документів	387
Алфавітний покажчик	396

Зміст

Передмова

9

Частина 1

Основи нарисної геометрії

Розділ 1. Предмет і метод нарисної геометрії.

Геометричне моделювання у прямокутних проекціях

1 1 Предмет і метод нарисної геометрії	12
1 2 Геометричні моделі у прямокутних проекціях основних геометричних образів	14
1 2 1 Моделювання точки Комплексний рисунок точки	14
1 2 2 Моделювання прямої	18
1 2 3 Моделювання площини	24
Запитання для самоперевірки	30

Розділ 2. Алгоритми розв'язання позиційних та метричних задач геометрії

2 1 Позиційні та метричні задачі геометричного моделювання в ортогональних проекціях прямих і площин	31
2 1 1 Перетин площин, перетин прямої та площини	31
2 1 2 Паралельність прямої та площини, паралельність площин	37
2 1 3 Перпендикулярність геометричних елементів	37
2 2 Способи перетворення комплексного рисунка	45
2 2 1 Спосіб заміни площин проекцій	45
2 2 2 Спосіб плоскопаралельного переміщення	50
2 2 3 Обертання навколо осей, перпендикулярних або паралельних до площин проекцій	52
2 2 4 Спосіб доповняльних кутів	57
Запитання для самоперевірки	59

Розділ 3. Моделювання кривих ліній та поверхонь

3 1 Криві лінії	60
3 1 1 Загальні відомості	60
3 1 2 Проекціювання кола	64

3.2. Поверхні	66
3.2.1. Лінійчаті поверхні	68
3.2.2. Поверхні обертання	73
3.3. Розгортки поверхонь	76
3.3.1. Розгортки багатогранників.....	76
3.3.2. Розгортки кривих поверхонь	79
Запитання для самоперевірки	84

Розділ 4. Алгоритми розв'язання задач перетину поверхонь площинами, прямими та між собою	85
4.1. Перетин поверхні з площиною	85
4.2. Перетин прямої та поверхні	90
4.3. Взаємний перетин поверхонь	96
4.3.1. Побудова лінії перетину поверхонь за допомогою посередників-площин окремого положення.....	97
4.3.2. Побудова лінії перетину поверхонь за допомогою посередників-площин загального положення	99
4.3.3. Побудова лінії перетину поверхонь за допомогою сферичних посередників.....	102
4.3.4. Особливі випадки перетину поверхонь другого порядку	106
Запитання для самоперевірки	111

Розділ 5. Аксонометричні проєкції	112
5.1. Прямокутна аксонометрія	114
5.2. Косокутна аксонометрія.....	118
Запитання для самоперевірки	118

Частина 2

Технічне креслення

Розділ 6. Загальні положення розроблення та оформлення конструкторської документації	120
6.1. Стандартизація в оформленні конструкторської документації	120
6.2. Визначення, призначеність, сфера застосування та правила позначання стандартів ЄСКД	122
6.3. Види виробів.....	124
6.4. Основні види конструкторських документів	125
6.5. Стадії розроблення конструкторської документації	128
6.6. Комплектність конструкторської документації.....	131
6.7. Позначання виробів і конструкторських документів	133
Запитання для самоперевірки	135

Розділ 7. Загальні вимоги до оформлення конструкторських документів	136
7.1. Формати і основний напис	136
7.2. Масштаби	140
7.3. Лінії на креслениках	140
7.3.1. Основні вимоги ЄСКД щодо зображення та застосування ліній на технічних креслениках	140
7.3.2. Виконання ліній відповідно до ДСТУ ISO 128-20:2003	143
7.4. Шрифти креслярські	146
7.5. Стандартні зображення — види, розрізи, перерізи	149
7.5.1. Загальні відомості	149
7.5.2. Види	151
7.5.3. Розрізи	154
7.5.4. Перерізи	158
7.5.5. Виносні елементи	160
7.5.6. Умовності та спрощення	161
7.5.7. Побудова зображень відповідно до стандартів ДСТУ ISO серії 128	164
7.6. Графічні позначки матеріалів та правила їх нанесення на креслениках	167
7.7. Розміри на креслениках	169
7.8. Правила нанесення на креслениках написів, технічних вимог і таблиць	177
7.9. Оформлення текстової документації	180
7.9.1. Загальні положення	180
7.9.2. Вимоги до текстових документів, що містять в основному суцільний текст	181
7.9.3. Вимоги до текстових документів, що містять текст, розбитий на графи	186
Запитання для самоперевірки	186
Розділ 8. Виконання креслеників деталей	188
8.1. Загальні вимоги	188
8.2. Зображення деталей	189
8.3. Нанесення розмірів	192
8.4. Граничні відхилення розмірів	199
8.5. Допуски форми та розташування поверхонь	202
8.6. Нанесення позначок шорсткості поверхонь	205
8.7. Позначання матеріалів	212
8.8. Нанесення на креслениках позначок покриттів, термічного та інших видів оброблення поверхонь	215
8.9. Нарізь та елементи деталей з нарізю	219

8.10. Приклади типових креслеників деталей	232
8.10.1. Деталі, що їх виготовляють на базі литих заготовок	232
8.10.2. Штамповані деталі	235
8.10.3. Деталі, що їх отримують механічним обробленням	236
Запитання для самоперевірки	240
Розділ 9. Зображення з'єднань деталей	241
9.1. Нарізові з'єднання	241
9.2. Шпонкові та шліцьові з'єднання	251
9.3. Зубчасті зачеплення	257
9.4. Зварні з'єднання	262
9.5. Паяні та клеєні з'єднання	267
Запитання для самоперевірки	269
Розділ 10. Специфікація та кресленики складаних одиниць	270
10.1. Специфікація складаної одиниці	270
10.2. Складальний кресленик	274
10.3. Габаритний кресленик	284
10.4. Монтажний кресленик	284
10.5. Кресленик загального виду	286
10.6. Деталювання кресленика загального виду	292
Запитання для самоперевірки	292
Розділ 11. Виконання креслеників деяких виробів радіоелектронної апаратури	293
11.1. Кресленики виробів з обмотками та магнітопроводами	293
11.2. Кресленики друкованих плат	298
11.3. Виконання кресленика та специфікації друкованого вузла	311
Запитання для самоперевірки	316
Розділ 12. Схеми	317
12.1. Загальні положення. Види та типи схем	317
12.2. Загальні вимоги до виконання схем	319
12.3. Правила виконання електричних схем різних типів	329
12.3.1. Схеми структурні	329
12.3.2. Схеми функційні	329
12.3.3. Схеми принципів	332
12.4. Умовні графічні позначки в електричних схемах	341
Запитання для самоперевірки	348

Розділ 13. Правила виконання електричних схем цифрової обчислювальної техніки	349
13.1. Загальні положення	349
13.2. Правила виконання структурних схем	353
13.3. Правила виконання функційних схем.....	354
13.4. Правила виконання принципів схем	356
Запитання для самоперевірки	366
Розділ 14. Оформлення програмної документації.....	367
14.1. Загальні положення	367
14.2. Види та правила позначання програм і програмних документів	369
14.3. Загальні вимоги до оформлення програмних документів	371
14.4. Вимоги до змісту та оформлення окремих видів програмних документів.....	376
14.4.1. Технічне завдання	376
14.4.2. Текст програми	377
14.4.3. Опис програми.....	377
14.4.4. Специфікація.....	377
14.4.5. Пояснювальна записка.....	379
14.5. Правила виконання схем алгоритмів, програм, даних і систем	380
Запитання для самоперевірки	386
Перелік нормативних документів	387
Алфавітний покажчик.....	396

Передмова

Створення будь-яких промислових виробів розпочинається з розроблення конструкторської документації. Від рівня її виконання значною мірою залежить можливість скорочення строків виробництва й освоєння виробів, зниження трудомісткості їх виготовлення, підвищення надійності та якості.

Інженерна графіка належить до загальноінженерних дисциплін підготовки бакалаврів і магістрів у вищих технічних закладах освіти.

Мета курсу інженерної графіки — дати студентам знання, уміння та навички з підготовки конструкторської документації на будь-які вироби, яка б охоплювала всі стадії їх розроблення, від появи ідеї до технічної реалізації й експлуатації, а також із використання апарата геометричного моделювання виробів та процесів як бази їх комп'ютерної візуалізації.

Нарисна геометрія — розділ геометрії, у якому просторові об'єкти й методи дослідження та розв'язання просторових задач вивчають за допомогою їх геометричного моделювання (зображення) на площині.

Технічне креслення базується на методі проекційних зображень. Воно вивчає запроваджені державними стандартами умовні позначення, спрощення й особливості створення конструкторської документації.

Розвиток обчислювальної техніки, винахід персональних комп'ютерів і графічних дисплеїв як технічних засобів відображення графічної інформації зумовили створення засобів генерації графічних зображень і автоматизованого виконання креслеників — комп'ютерної графіки.

Комп'ютерна графіка — це сукупність методів і способів перетворення за допомогою комп'ютера даних у графічне зображення, а графічного зображення — у дані (ДСТУ 2939–94 «Системи оброблення інформації. Комп'ютерна графіка. Терміни та визначення»).

Базою для створення геометричних моделей (зображень) об'єктів, що відповідають вимогам конструкторсько-технічної та технологічної документації, у графічних системах є інженерна графіка та її складові — нарисна геометрія й технічне креслення.

Від видавництва

Свої зауваження, пропозиції та запитання надсилайте за адресою електронної пошти **pg@bhv.kiev.ua**, а також залишайте на сайті **<http://www.osvita.info>**. На цьому ж сайті можна отримати докладні відомості про видання серії «Інформатика» для вищих навчальних закладів.

Інформацію про інші книжки Видавничої групи BHV ви знайдете на сайті **<http://www.bhv.kiev.ua>**.

Частина 1

Основи нарисної геометрії

Розділ 1

Предмет і метод нарисної геометрії. Геометричне моделювання у прямокутних проекціях

- ♦ Предмет і метод нарисної геометрії
- ♦ Геометричні моделі у прямокутних проекціях основних геометричних образів

1.1. Предмет і метод нарисної геометрії

Нарисна геометрія — розділ геометрії, в якому просторові об'єкти та методи розв'язання і дослідження просторових задач вивчають за допомогою їх геометричного моделювання (зображення) на площині.

Предметом нарисної геометрії є розроблення алгоритмів графічних операцій побудови геометричних моделей (зображень) об'єктів та процесів для розв'язання *позиційних і метричних задач*.

Метою розв'язання *позиційних задач* є вивчення взаємного розміщення геометричних об'єктів у просторі або на площині, *метричних* — метричні характеристики як самих об'єктів, так і їх взаємного положення.

Основним елементом тривимірного простору вважають точку. Довільну сукупність (множину) точок називають геометричною фігурою. Будь-який геометричний об'єкт (пряму чи криву лінію, площину, поверхню) можна задати сукупністю (множиною) точок.

Зображення об'єкта на площині вважають *повним*, якщо воно дає змогу визначити позиційний взаємозв'язок його елементів. Зображення, за якими можна визначити розміри об'єкта, називають *метрично визначеними*. Такі зображення можна побудувати лише за певними геометричними правилами, що вможливають зворотний перехід — від плоского зображення до натуральних форм об'єкта.

Основним методом побудови плоских зображень просторових об'єктів у нарисній геометрії є *метод проєкціювання*. Зображення, побудовані за його допомогою, на-

зивають *проекціями*. Для отримання проекцій точки — основного елемента тривимірного простору — слід задати *площину проекцій* та *проекціювальний промінь*.

Через кожну точку простору A можна провести єдиний проекціювальний промінь. Його перетин із площиною проекцій Π_1 являє собою проекцію цієї точки. Такий промінь може бути заданий:

- центром S (центральне проекціювання);
- напрямом s (паралельне проекціювання).

На рис. 1.1, *а* показано центральне проекціювання, а на рис. 1.1, *б* — паралельне.

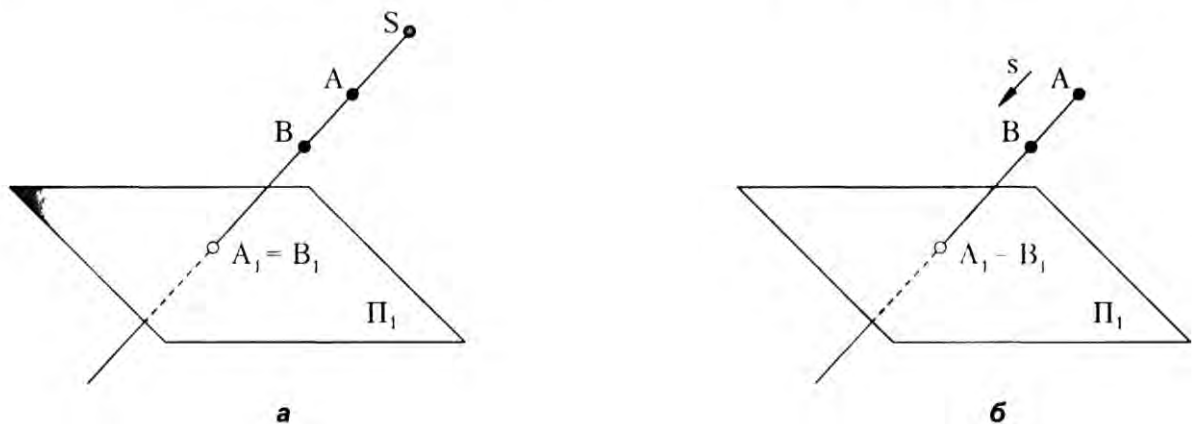


Рис. 1.1

Отримана проекція точки визначається однозначно, а от обернена задача визначення точки у просторі за її проекцією не однозначна. В одну й ту саму точку на площині проекцій проекціюються всі точки, що належать проекціювальному променю (наприклад, точка B). Одержане зображення не є оборотним. Для того, щоб зображення було *оборотним*, потрібно мати два зображення точки на одну або дві площини проекцій (рис. 1.2, *а*, *б*).

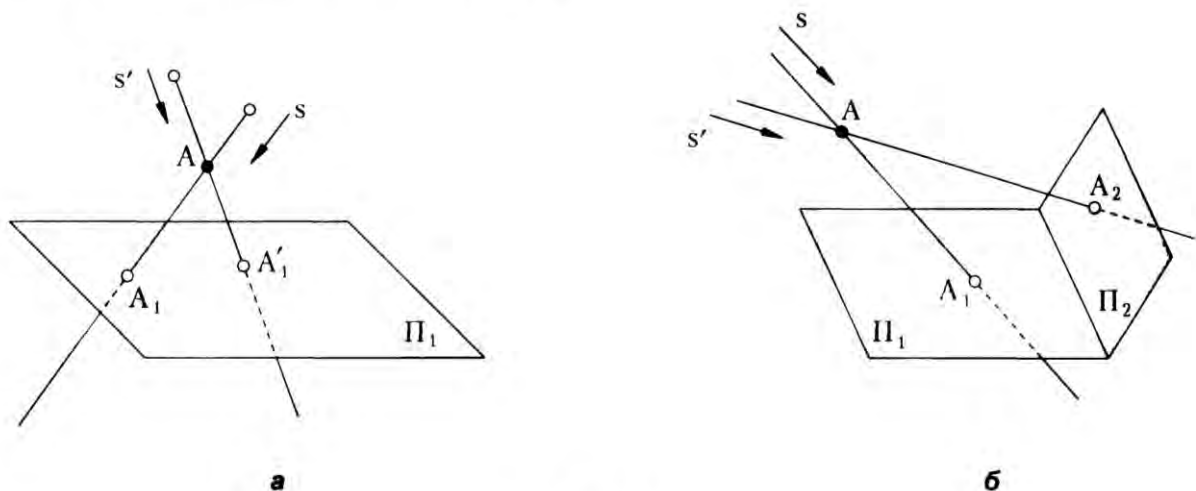


Рис. 1.2

Наведені схеми отримання зображень об'єктів досить складні для розв'язування позиційних та метричних задач. В інженерній практиці, як правило, використовують прямокутне проєкціювання, коли проєкціювальний промінь перпендикулярний до площини проєкцій (рис. 1.3).

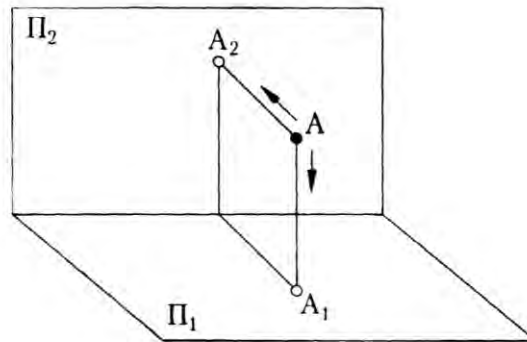


Рис. 1.3

1.2. Геометричні моделі у прямокутних проєкціях основних геометричних образів

1.2.1. Моделювання точки. Комплексний рисунок точки

Моделями геометричних образів називають їх відображення на якусь упорядковану систему. Будь-яку точку простору в прямокутній системі координат можна задати трьома координатами (на рис. 1.4 точка A має координати x_A, y_A, z_A). Пари координатних осей формують три площини xOy, xOz, zOy , кожну з яких можна взяти як площину проєкцій. Координатну площину xOy , розташовану горизонтально, називають *горизонтальною площиною проєкцій* Π_1 , перпендикулярну до неї площину xOz — *фронтальною площиною проєкцій* Π_2 .

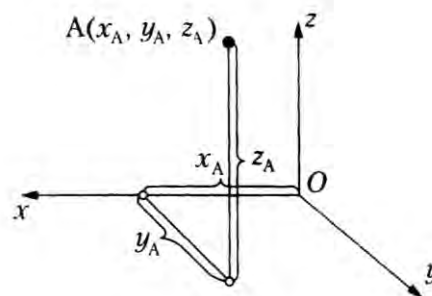


Рис. 1.4

Як правило, вважають, що фронтальна площина Π_2 розташована перед спостерігачем. Праворуч від спостерігача розташована профільна площина проєкцій Π_3 (zOy) (рис. 1.5). Таку систему площин називають *прямокутною системою площин проєкцій*.

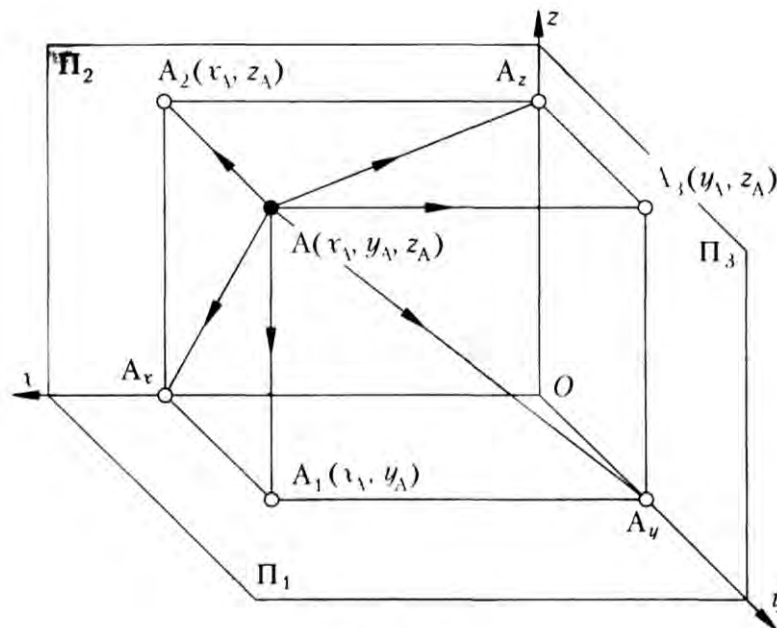


Рис. 1.5

Осі координат, які є лініями перетину площин проекцій, називають *осями проекцій* Ox , Oy , Oz , а початок координат O — *початком проекцій*.

Проекціювальні промені AA_1 , AA_2 , AA_3 , проведені з точки A перпендикулярно до площин Π_1 , Π_2 , Π_3 , задають на перетині з ними відповідно A_1 — горизонтальну проекцію точки A , A_2 — фронтальну проекцію точки A , A_3 — профільну проекцію точки A .

Будь-які дві проекції точки A на площини проекцій задають три її координати та, відповідно, повністю визначають її положення у просторі. Наприклад, $A(A_1, A_2)$, $A(A_2, A_3)$, $A(A_1, A_3)$. Такий запис називають *визначником точки*. Точку A можна спроектувати на осі проекцій. Отримані точки A_x , A_y , A_z називають проекціями точки A на відповідні осі проекцій.

Як було показано, дві проекції точки повністю визначають її положення у просторі. Проте для розв'язання деяких задач потрібна додаткова площина проекцій. Наприклад, відстань d від точки A до осі Ox можна визначити лише на профільній площині проекцій Π_3 .

Для спрощення наведеної системи площин проекцій перетворимо її на плоский рисунок. Із цією метою сумістимо горизонтальну та профільну площини проекцій з фронтальною площиною проекцій обертанням навколо осей Ox та Oz відповідно (рис. 1.6). Отриманий рисунок (рис. 1.7) називають *комплексним рисунком точки*, або *етюром Монжа точки*. Позначка осі Oy , яка належить водночас площинам Π_1 та Π_3 , на комплексному рисунку на площинах проекцій Π_1 та Π_3 відрізняється позначкою відповідної площини. Лінії, що з'єднують проекції, називають *лініями зв'язку*; A_2A_1 — *вертикальна лінія зв'язку*, A_2A_3 — *горизонтальна лінія зв'язку*.

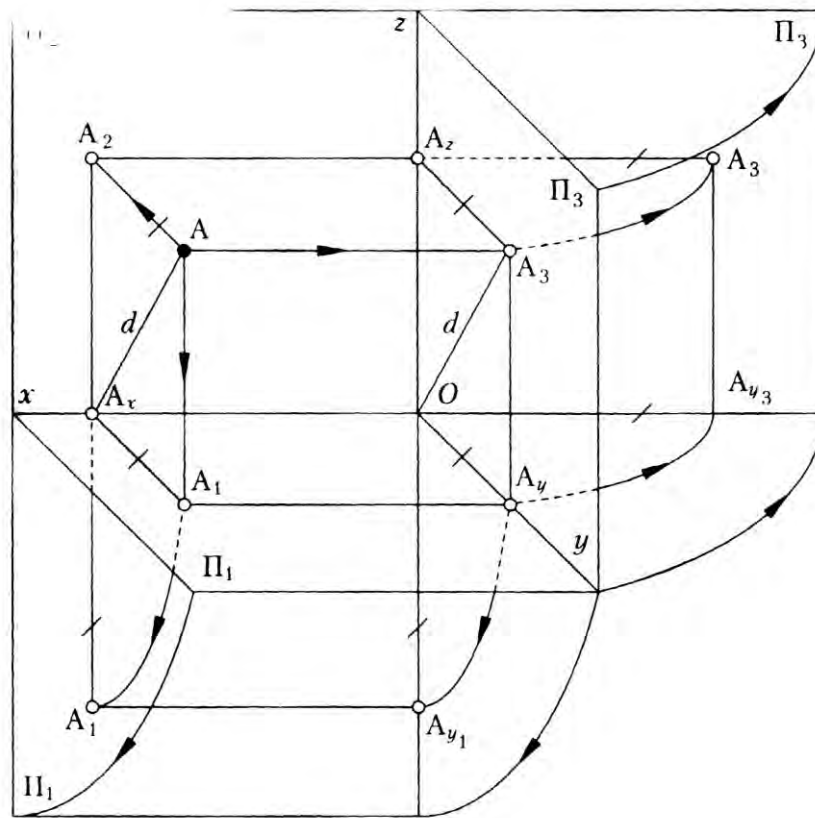


Рис. 1.6

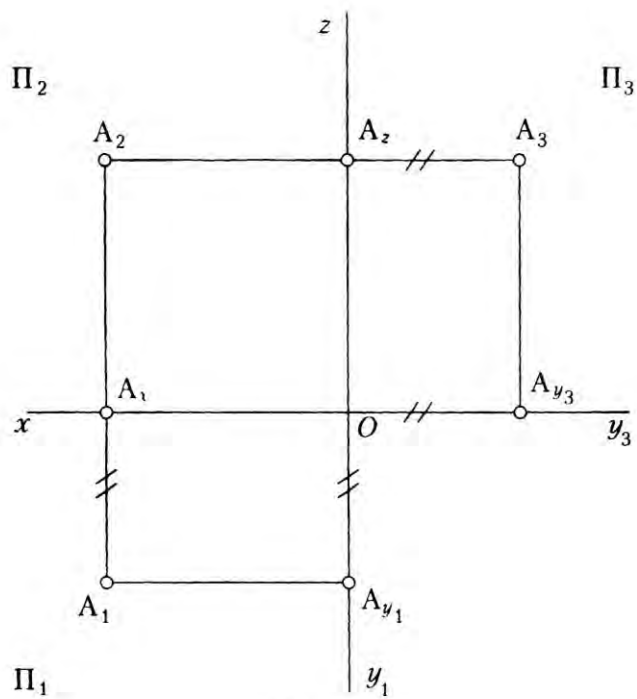


Рис. 1.7

На комплексному рисунку можна зобразити будь-яку точку простору за її прямокутними координатами (пряма задача). Наприклад, на рис. 1.8 точка В (20, 30, 10).

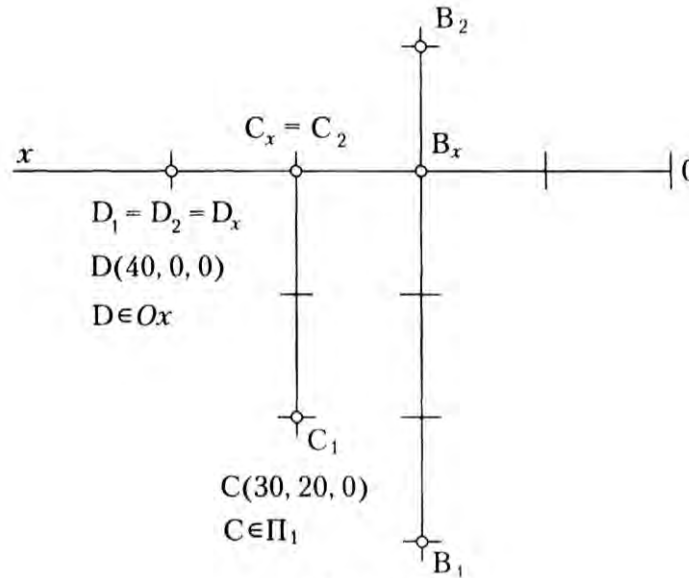


Рис. 1.8

За зображенням точки на комплексному рисунку можна визначити її координати й положення відносно заданої системи площин проекцій (обернена задача). Як приклад можна розглянути точки С, D на рис. 1.8.

За двома заданими проекціями точки можна побудувати її третю профільну проекцію. Для такої побудови використовують три конструктивні прийоми: координатний (рис. 1.9, а), проекційний (рис. 1.9, б), за допомогою сталої прямої k (рис. 1.9, в).

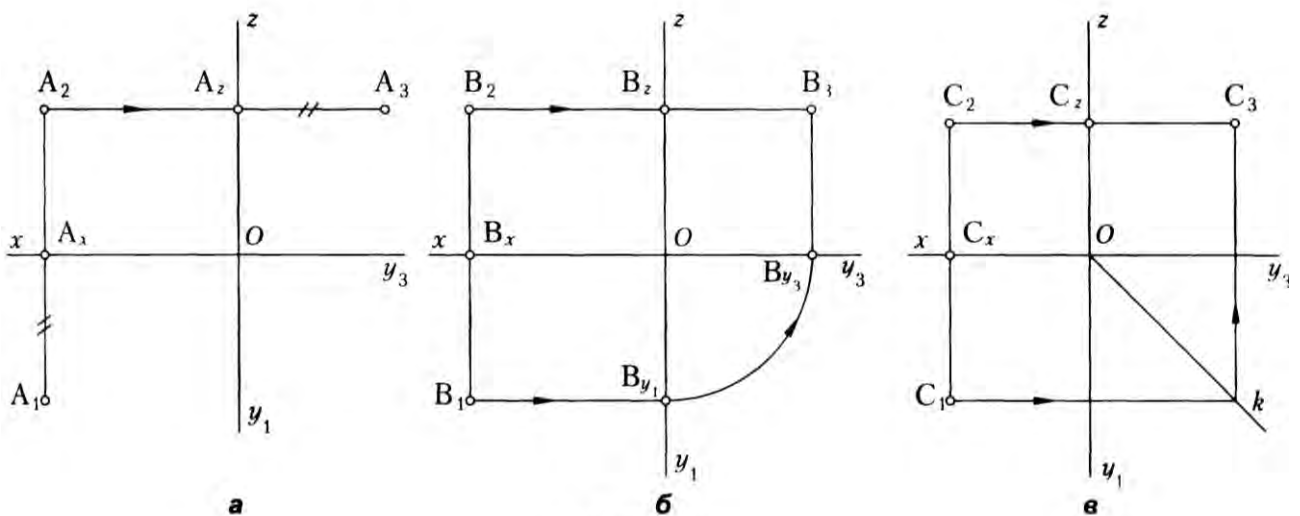


Рис. 1.9

Нами розглянуто лише одну чверть простору, яку обмежено площинами проєкцій Π_1 та Π_2 . Якщо продовжити площини Π_1 та Π_2 за вісь Ox (рис. 1.10), то вони поділять простір на чотири чверті. Після побудови комплексного рисунка точки, розташовані в іншій чверті простору, мають інше положення проєкцій, ніж точки першої чверті (рис. 1.11).

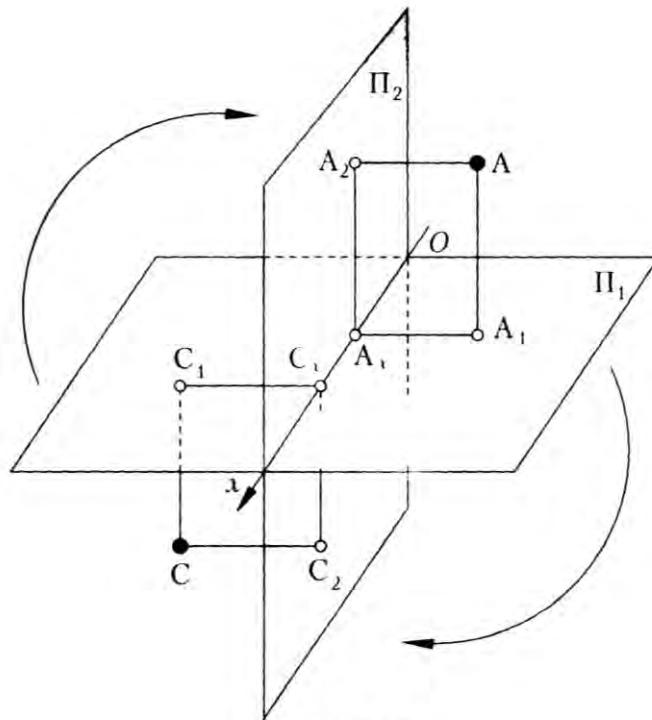


Рис. 1.10

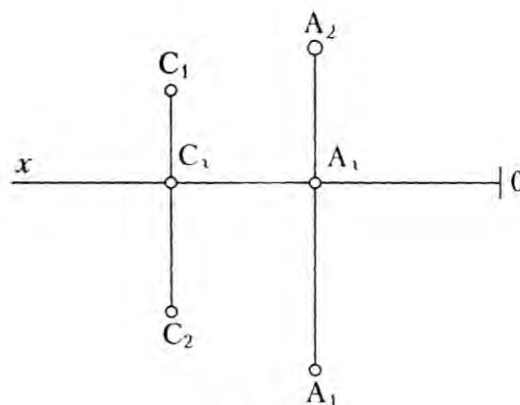


Рис. 1.11

1.2.2. Моделювання прямої

Визначником прямої є дві її точки. Наприклад, $a(A, B)$ — пряма a , задана двома точками A та B . Модель прямої у прямокутній системі площин проєкцій можна задати проєкціями двох її точок (рис. 1.12). Таке зображення прямої називають комплексним рисунком прямої.

Пряму можна задати й допоміжним визначником $b(A, s)$ — точкою A та напрямом s , який визначається на проекціях спрямуванням проекцій b_1, b_2 (рис. 1.13).

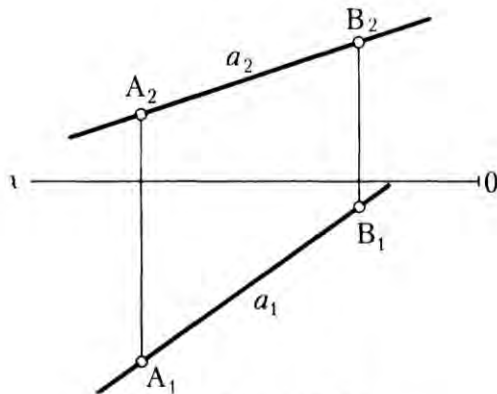


Рис. 1.12

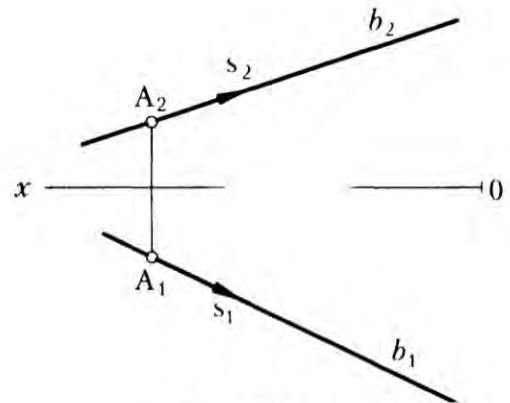


Рис. 1.13

Комплексний рисунок прямої дає змогу:

- побудувати її у прямокутній системі координат $Oxyz$, визначивши дві її точки $A(x_A, y_A, z_A)$ та $B(x_B, y_B, z_B)$;
- визначити взаємне положення точок простору та прямої, двох прямих;
- визначити натуральну величину (н. в.) відрізка прямої.

Точка належить прямій, якщо її проекції належать до однойменних проекцій прямої. На рис. 1.14 точка A належить прямій a ($A \in a$), а точка B — не належить прямій a ($B \notin a$), бо лежить у третій чверті простору, а відповідна точка прямої K ($K \in a$) — у першій.

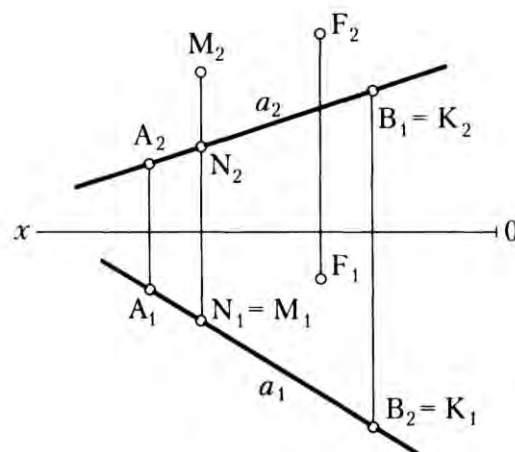


Рис. 1.14

Порівнявши координати точки простору та прямої, можна визначити їх взаємне положення. Наприклад, точка M має більшу координату z , ніж точка N , яка належить прямій a ; отже, вона розташована *над* прямою. Подібно визначаємо, що точка F лежить *над* та *за* прямою.

Визначення натуральної величини відрізка прямої

Розглянемо відрізок AB прямої a у тривимірному просторі (рис. 1.15). Нехай A_1B_1 — горизонтальна проекція відрізка AB . Якщо перемістити відрізок A_1B_1 паралельно до себе так, щоб нове положення точки A'_1 збігалось з точкою A , то у прямокутному трикутнику ABV_0 довжина відрізка AB дорівнює довжині гіпотенузи, довжина катета AB_0 — довжині проекції A_1B_1 відрізка AB на горизонтальну площину проєкцій, а довжина катета BB_0 є різницею відстаней кінцевих точок A та B відрізка AB від горизонтальної площини проєкцій Π_1 — Δz . Кут між гіпотенузою AB та катетом AB_0 дорівнює куту нахилу відрізка AB до площини проєкцій Π_1 .

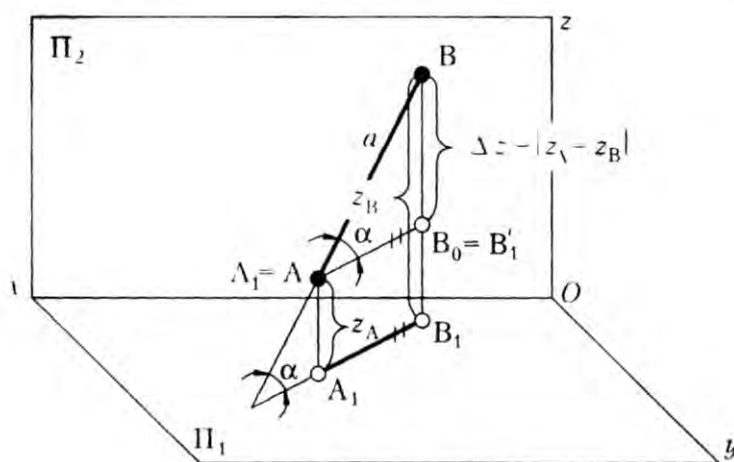


Рис. 1.15

Такий спосіб визначення натуральної величини відрізка прямої називають *правилом прямокутного трикутника*. Його застосування на комплексному рисунку проілюстровано на рис. 1.16.

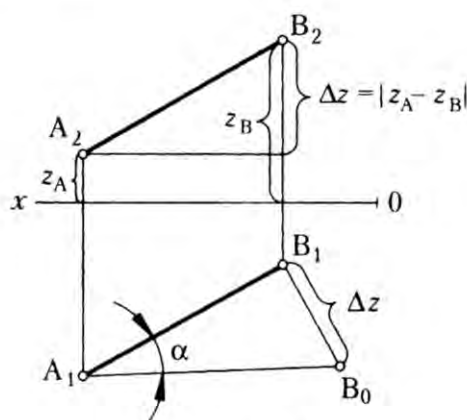


Рис. 1.16

Аналогічно можна визначити натуральну величину відрізка прямої на:

- фронтальній площині проєкцій Π_2 (рис. 1.17), де різниця відстаней кінцевих точок відрізка від площини проєкцій Π_2 — Δy , а кут нахилу до неї — β ;
- профільній площині проєкцій Π_3 (рис. 1.18), де різниця відстаней кінцевих точок відрізка від площини проєкцій Π_3 — Δx , а кут нахилу до неї — γ .

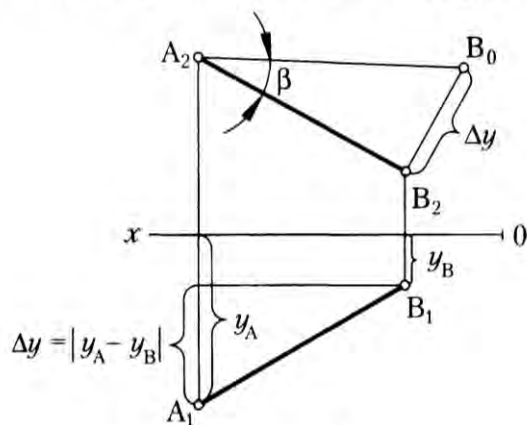


Рис. 1.17

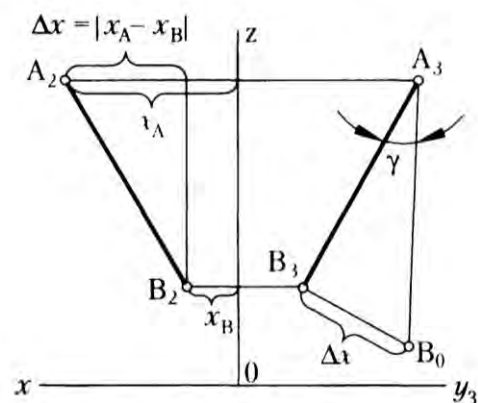


Рис. 1.18

Сліди прямої

Слідами прямої називають точки її перетину з площинами проєкцій. Перетин з площиною Π_1 має назву *горизонтального сліду*, з Π_2 — *фронтального*, а з Π_3 — *профільного*. Це означає, що для кожного сліду одна з координат дорівнює нулю.

На рис. 1.19 зображено горизонтальний M та фронтальний N сліди прямої.

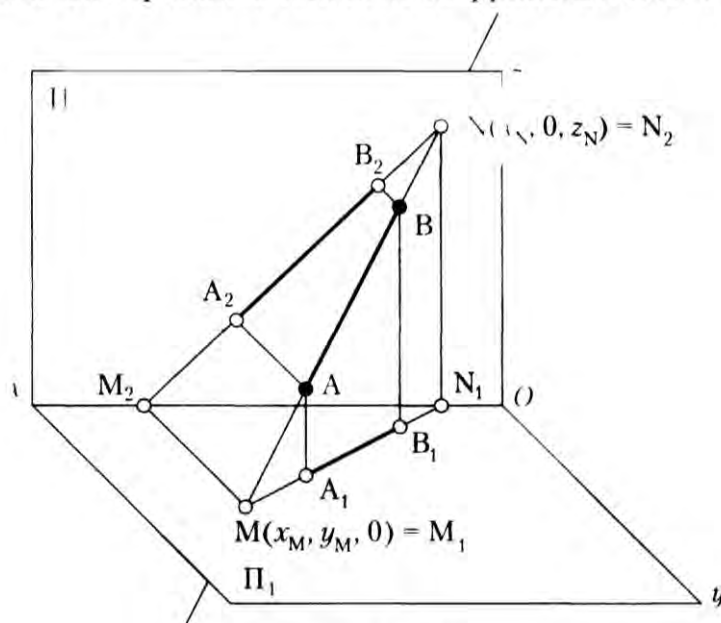


Рис. 1.19

На рис. 1.20 показано схему побудови слідів прямої a . Горизонтальний слід M має координату $z_M = 0$. Його фронтальна проекція визначається перетином фронтальної проекції прямої та осі Ox .

Фронтальний слід N має координату $y_N = 0$. Його горизонтальна проекція визначається перетином горизонтальної проекції прямої та осі Ox .

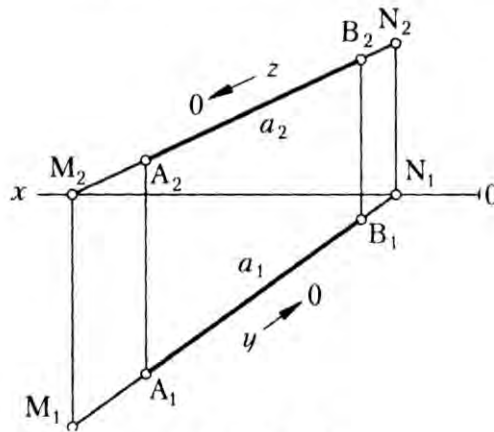


Рис. 1.20

Відносне положення прямої та площин проекцій

Пряму, довільно розташовану відносно площин проекцій, називають *прямою загального положення* (див. рис. 1.12–1.20).

Окремі положення займає пряма, паралельна хоча б до однієї з площин проекцій.

Пряму AB , паралельну до площини проекцій Π_1 (рис. 1.21, а), називають *горизонтальною* (*горизонталлю*). Таку пряму, як правило, позначають літерою h , а її відрізок та кут β її нахилу до площини проекцій Π_2 відображаються в натуральну величину на площині проекцій Π_1 .

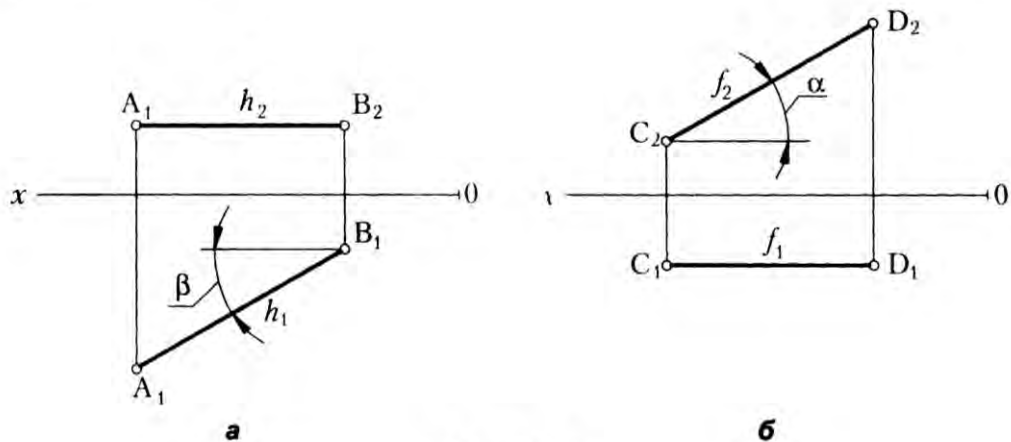


Рис. 1.21

Пряму CD , паралельну до площини проекцій Π_2 , називають *фронтальною* (*фронталлю*) і позначають літерою f . Її відрізок та кут α нахилу до площини

проекцій Π_1 відображаються в натуральну величину на площині проекцій Π_2 (рис 1.21, б)

Пряму EF , паралельну до площини проекцій Π_3 , називають *профільною прямою* і позначають літерою p . Її відрізок та кути нахилу α до площини проекцій Π_1 і β до площини проекцій Π_2 відображаються на площині проекцій Π_3 у натуральну величину (рис 1.22)

Прямі, перпендикулярні до однієї з площин проекцій, називають *проекціювальними* (рис 1.23)

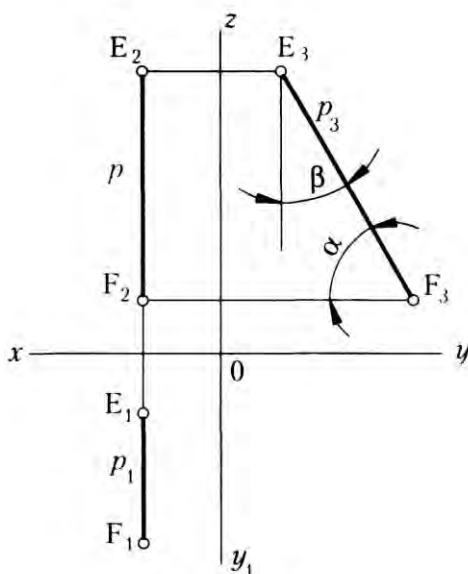


Рис. 1.22

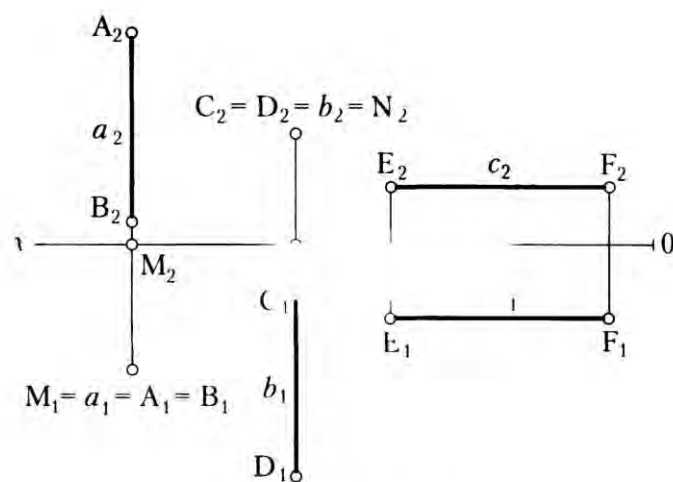


Рис. 1.23

Пряму $a(A, B)$, перпендикулярну до Π_1 , називають *горизонтально проекціювальною*, пряму $b(C, D)$, перпендикулярну до Π_2 , — *фронтально-проекціювальною*, а пряму $c(E, F)$, перпендикулярну до Π_3 , — *профільно-проекціювальною*. Кожна з таких прямих проектується на перпендикулярну до неї площину точкою, яка водночас є проекцією і слідом (M, N) та має назву *сліду-проекції*. Слід-проекція має збіральні властивості, тобто кожна точка такої прямої проектується у її слід-проекцію. Будь-які дві точки проекціювальної прямої називають *конкуруючими*. Це, наприклад, точки A та B прямої a , C та D прямої b , E та F прямої c . Із двох конкуруючих точок на сліди-проекції видима та, яка має більшу координату. Наприклад, на горизонтальній проекції прямої a видимою є точка A , на фронтальній проекції прямої b видима точка D , а на профільній проекції прямої c — точка E .

Взаємне положення двох прямих

Паралельність двох прямих відображається на комплексному рисунку паралельністю їх проекцій (на рис 1.24 — $a \parallel b$), перетин двох прямих — спільною точкою, проекції якої розташовані на одній лінії зв'язку (на рис 1.25 — $c \cap d = K$). Мимобіжні прямі не мають таких спільних точок (на рис 1.26 — m / n). Видимість точок

двох мимобіжних прямих на проєкціях у місцях перетину їх проєкцій визначають за допомогою конкуруючих точок. На рис. 1.26 на горизонтальній проєкції в точці перетину проєкцій видима пряма n ($z_3 > z_4$), на фронтальній — в точці перетину проєкцій пряма m ($y_2 > y_1$)

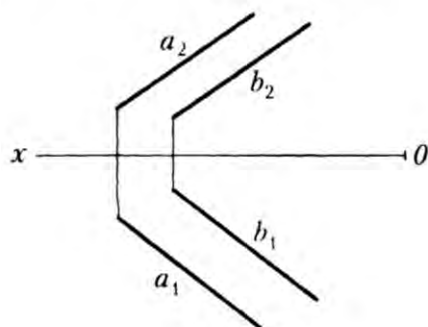


Рис. 1.24

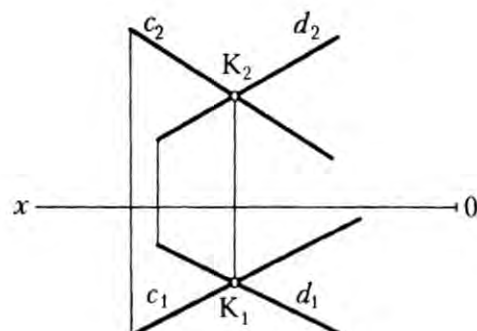


Рис. 1.25

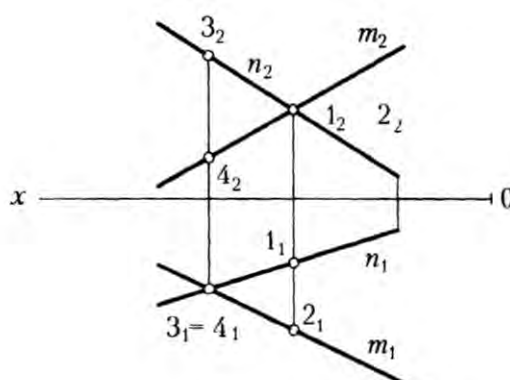


Рис. 1.26

1.2.3. Моделювання площини

Основним визначником площини є три її точки, що не лежать на одній прямій. Наприклад, $\Sigma(A, B, C)$ — площина Σ , задана трьома точками A , B та C .

Модель площини у прямокутній системі площин проєкцій можна задати проєкціями трьох її точок (рис. 1.27). Таке зображення площини називають її комплексним рисунком.

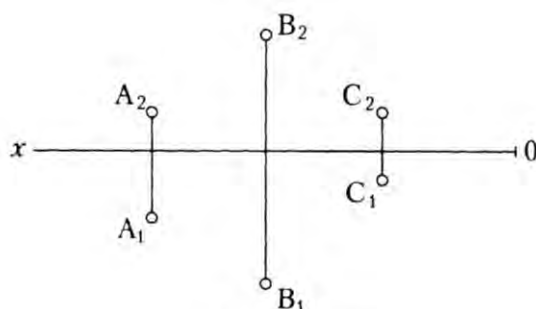


Рис. 1.27

Площину можна задати й допоміжними визначниками, утвореними об'єднанням точок основного визначника:

- прямою та точкою — $\Delta(a, A)$ (рис. 1.28);
- двома прямими, що перетинаються, — $\Gamma(a \cap b)$ (рис. 1.29);
- двома паралельними прямими — $\Sigma(a \parallel b)$ (рис. 1.30);
- будь-якою плоскою фігурою — $\Psi(\Delta ABC)$ (рис. 1.31).

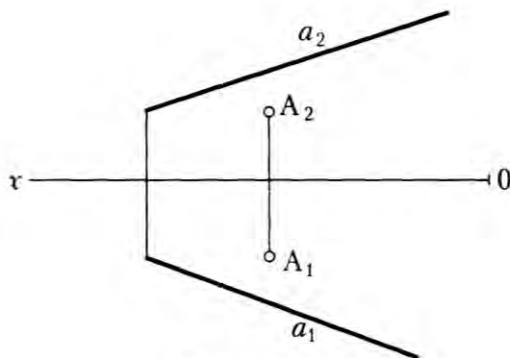


Рис. 1.28

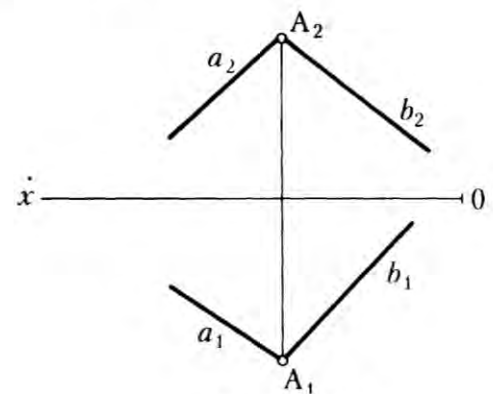


Рис. 1.29

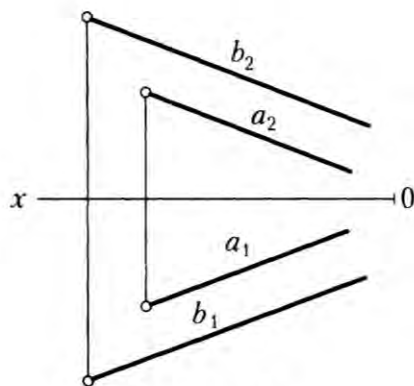


Рис. 1.30

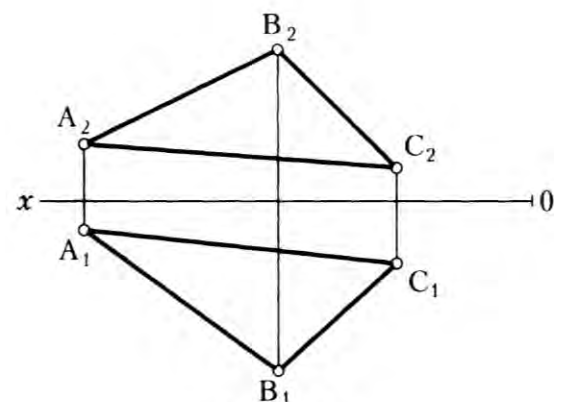


Рис. 1.31

Комплексний рисунок площини дає змогу:

- побудувати її у прямокутній системі координат $Oxyz$;
- визначити кути її нахилу до площин проекцій;
- визначити взаємне положення будь-якої точки простору та площини, прямої та площини, двох площин;
- визначити натуральну величину відсіку площини.

Відсіком площини називають її обмежену частину.

Пряма належить площині, якщо:

- має з нею дві спільні точки;
- має з нею спільну точку та паралельна до прямої цієї площини.

Прямі, які належать площині та паралельні до якоїсь із площин проекцій, називають *лініями рівня*. На рис. 1.32 побудовано горизонталь h площини $\Sigma(a \cap b)$, відстань (рівень) якої від площини Π_1 дорівнює z_h . Будь-яка інша горизонталь h' цієї площини паралельна до h . Рівень фронталі площини визначається координатою y_f , а профільної прямої площини — x_p .

Точка належить площині, якщо вона належить прямій цієї площини (рис. 1.33 — $D \in \Sigma(\Delta ABC)$).

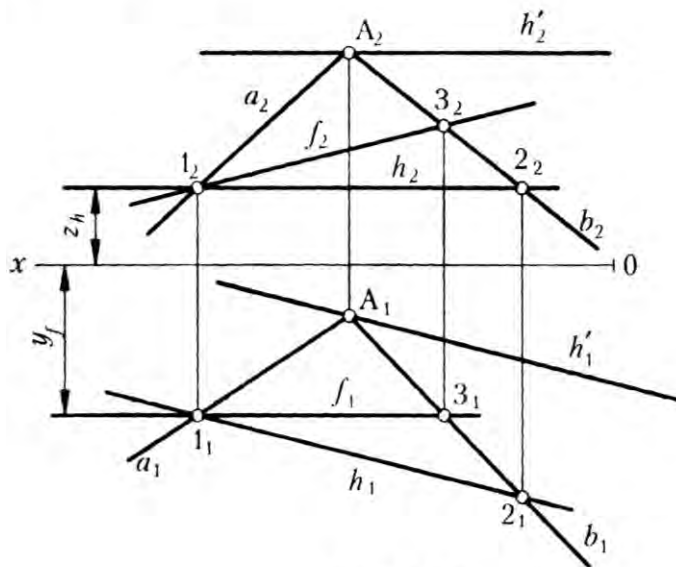


Рис. 1.32

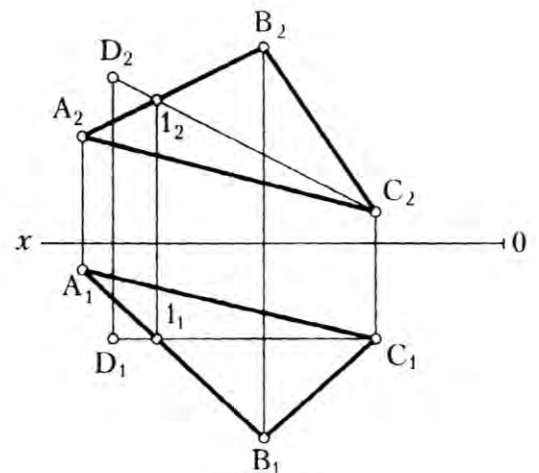


Рис. 1.33

Слідами площини називають лінії її перетину з площинами проекцій (рис. 1.34, а, б). Перетин із площиною Π_1 має назву *горизонтального сліду*, з Π_2 — *фронтального*, з Π_3 — *профільного*. Це означає, що для кожного сліду одна з координат усіх його точок однакова та дорівнює нулю. Інакше кажучи, кожний слід є нульовою лінією рівня площини ($z_{h^0} = 0$, $y_{f^0} = 0$, $x_{p^0} = 0$). Точки перетину слідів називають *точками збігу слідів* (Σ_x , Σ_y , Σ_z).

Як будь-які прямі площини, її сліди на комплексному рисунку можна побудувати:

- за двома точками — слідами двох прямих, що належать площині; наприклад, на рис. 1.34, а фронтальний слід f^0 визначається слідами N та K прямих a та b площини;
- за точкою (слідом будь-якої прямої) та напрямом — паралельністю до будь-якої лінії рівня площини; наприклад, на рис. 1.34, а нульову фронталь f^0 можна побудувати як пряму, паралельну до фронталі f площини й таку, що проходить через слід F прямої h .

На рис. 1.35 проілюстровано побудову слідів площини $\Sigma(h \cap f)$: фронтального f^0 за слідом F горизонталі h та паралельного до фронталі f площини; горизонтального h^0 за точкою збігу слідів Σ_x та паралельного до горизонталі площини h .

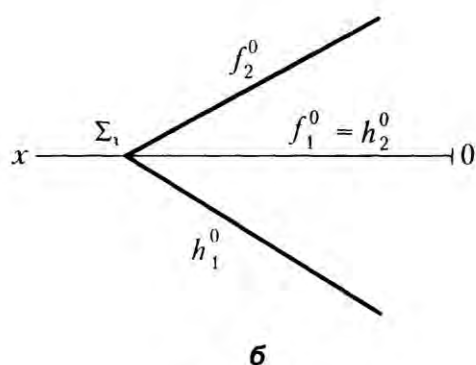
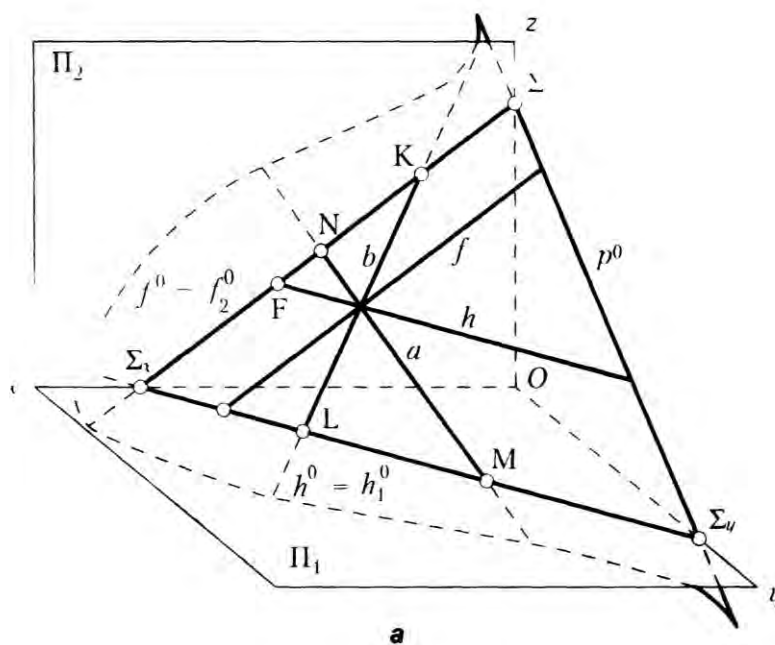


Рис. 1.34

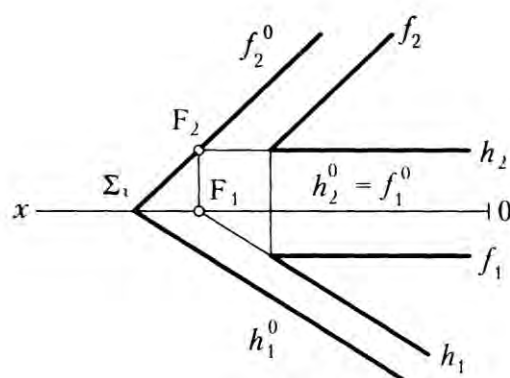


Рис. 1.35

За положенням відносно площин проєкцій площини поділяють на такі:

- площини загального положення, якщо площина довільно розташована відносно площин проєкцій (див. рис. 1.27–1.35);

- *площини окремого положення*, коли площина перпендикулярна хоча б до однієї з площин проєкцій.

Площину, перпендикулярну до однієї з площин проєкцій, називають *проєкціювальною*. Відповідно до площини проєкцій проєкціювальні площини можуть бути:

- *горизонтально-проєкціювальними* (на рис. 1.36, а — $\Sigma(\Delta ABC) \perp P_1$, на рис. 1.36, б — $\Sigma(\Sigma_1) \perp P_1$);
- *фронтально-проєкціювальними* (на рис. 1.37 — $\Delta(a \parallel b) \perp P_2$);
- *профільно-проєкціювальними* (на рис. 1.38 — $\Gamma(a \cap b) \perp P_3$).

Кожна з проєкціювальних площин утворює на перпендикулярній до неї площині проєкцій *слід-проєкцію*. Слід-проєкція має збиральні властивості. Це означає, що всі елементи площини проєкціюються на слід-проєкцію. Слід-проєкція повністю визначає положення площини у просторі — перпендикулярність до однієї площини проєкцій та кути нахилу до двох інших. Будь-яку проєкціювальну площину можна задати лише слідом-проєкцією (див. рис. 1.36, б).

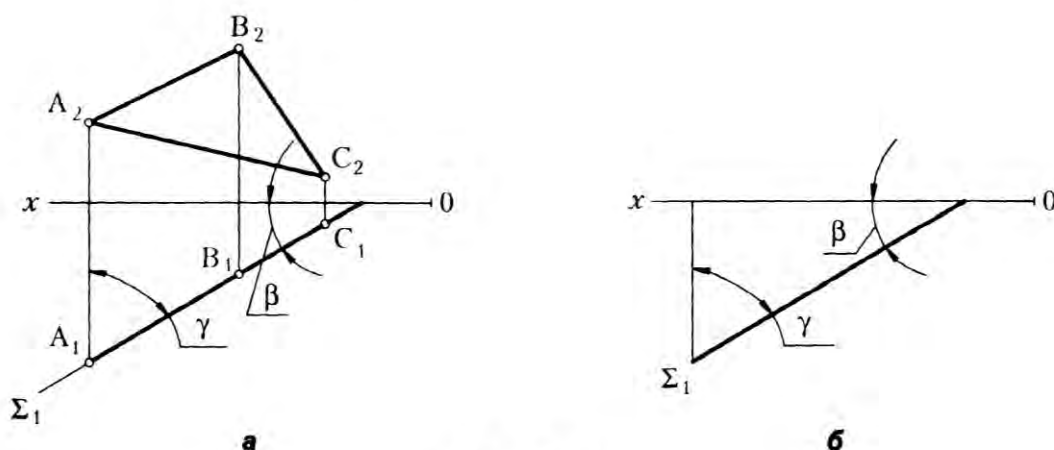


Рис. 1.36

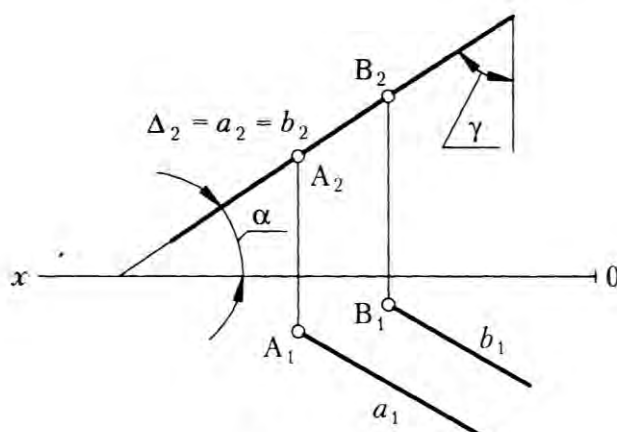


Рис. 1.37

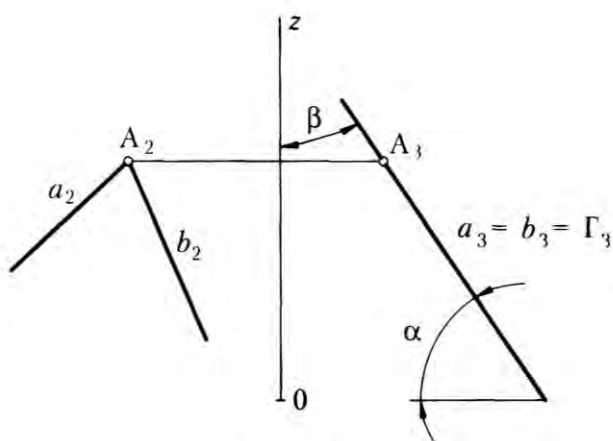


Рис. 1.38

Площину, паралельну до площини проєкцій, називають *площиною рівня*. Одна з координат усіх точок такої площини однакова й дорівнює відстані (рівню) площини від паралельної до неї площини проєкцій. На цю площину відсіки площини рівня проєкціюються у натуральну величину. Розрізняють *горизонтальні площини рівня*, або *горизонтальні площини* (рис. 1.39), *фронтальні площини рівня*, або *фронтальні площини* (рис. 1.40), *профільні площини рівня*, або *профільні площини* (рис. 1.41).

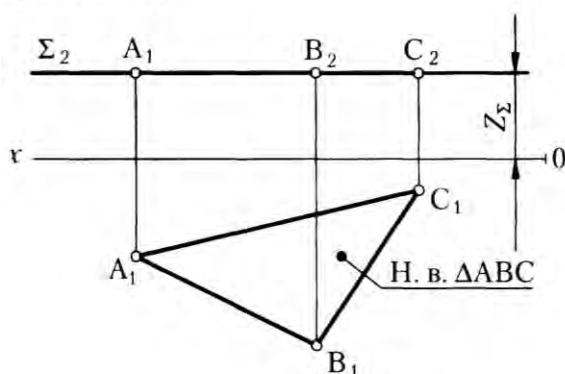


Рис. 1.39

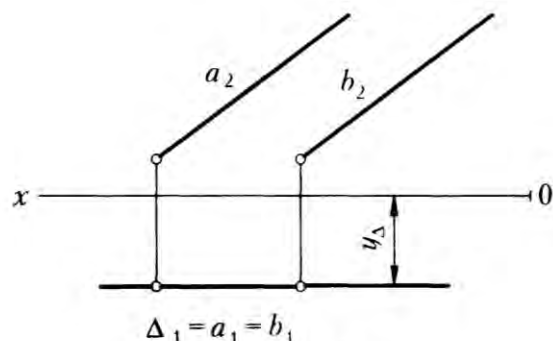


Рис. 1.40

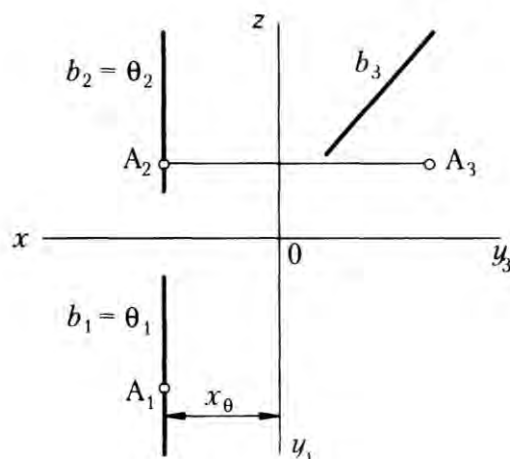


Рис. 1.41

Запитання для самоперевірки

1. Що вивчає нарисна геометрія?
2. Який основний метод нарисної геометрії?
3. Коли зображення об'єкта на площині вважають повним та метрично визначеним?
4. Як можна отримати зображення точки на площині?
5. Як моделюється точка в системі ортогональних проекцій? Що таке комплексний рисунок точки?
6. Що таке визначник прямої, площини? Навести основні визначники прямої, площини.
7. Як визначити належність точки до площини, а також прямої до площини?
8. Як визначити натуральну величину відрізка прямої?
9. Як прямі та площини поділяються за положенням відносно площин проекцій?

Розділ 2

Алгоритми розв'язання позиційних та метричних задач геометрії

- ♦ Позиційні та метричні задачі геометричного моделювання в ортогональних проекціях прямих і площин
- ♦ Способи перетворення комплексного рисунка

2.1. Позиційні та метричні задачі геометричного моделювання в ортогональних проекціях прямих і площин

Задачі геометричного моделювання мають модульну структуру. Будь-яка комплексна задача складається з простих модулів, а сама комплексна задача може бути модулем складнішої задачі. Модульна структура є принципом формування алгоритмів розв'язання комплексних задач нарисної геометрії.

Розглянемо основні модулі комплексних позиційних та метричних задач.

2.1.1. Перетин площин, перетин прямої та площини

Модуль 1. Перетин прямої та проекціювальної площини (рис. 2.1).

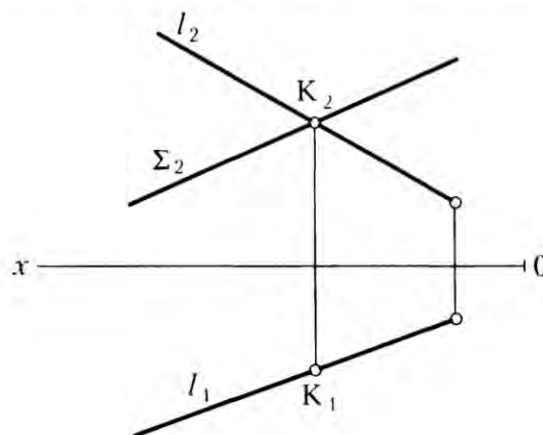


Рис. 2.1

У цьому випадку точка перетину $K = l \cap \Sigma$ очевидна. Вона визначається перетином сліду-проекції проекціювальної площини та відповідної проекції прямої.

Модуль 2. Перетин площини загального положення та проєкціювальної площини (рис. 2.2).

Задачу можна розв'язати за допомогою модуля 1. Дві будь-які прямі загального положення перетинають проєкціювальну площину у двох точках, які визначають лінію перетину двох площин: $\Sigma(a \cap b) \cap \Gamma(\Gamma_2) = m(A, B)$.

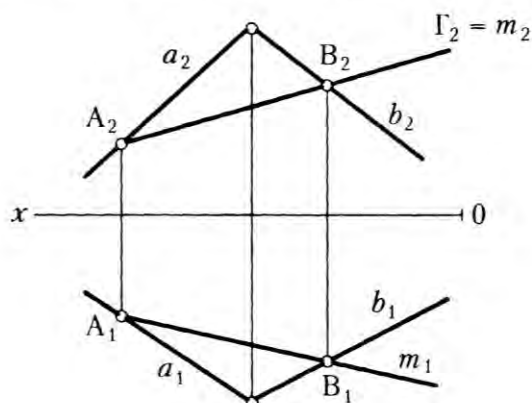


Рис. 2.2

Перетин двох площин загального положення

Лінія перетину двох площин — пряма, визначником якої, як відомо, є дві її точки або точка та напрямок.

Задачу перетину двох площин загального положення розв'язують за допомогою допоміжних проєкціювальних площин-посередників. Перетин такої площини з кожною площиною загального положення розглянуто нами як модуль 2.

Розглянемо алгоритм побудови лінії перетину двох площин. Нехай потрібно визначити лінію перетину двох площин Σ та Δ : $\Sigma \cap \Delta = m(A, B)$ (рис. 2.3).

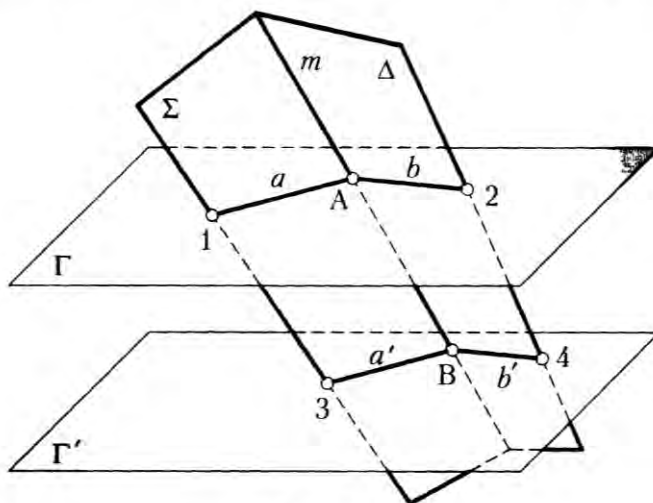


Рис. 2.3

- 1 Перетнемо площини Σ та Δ довільно розташованою допоміжною проєкціювальною площиною Γ та знайдемо лінії перетину допоміжної площини з кожною із заданих. Для розв'язання задачі використовують модуль 2: $\Sigma \cap \Gamma = a$, $\Delta \cap \Gamma = b$.
- 2 Знайдемо точку перетину ліній a та b : $a \cap b = A$. Ця точка є спільною для площин Σ та Δ , тобто належить лінії їх перетину.
- 3 Повторюємо побудови для пошуку другої точки лінії перетину площин Σ та Δ . На рис. 2.4 показано реалізацію алгоритму на комплексному рисунку.

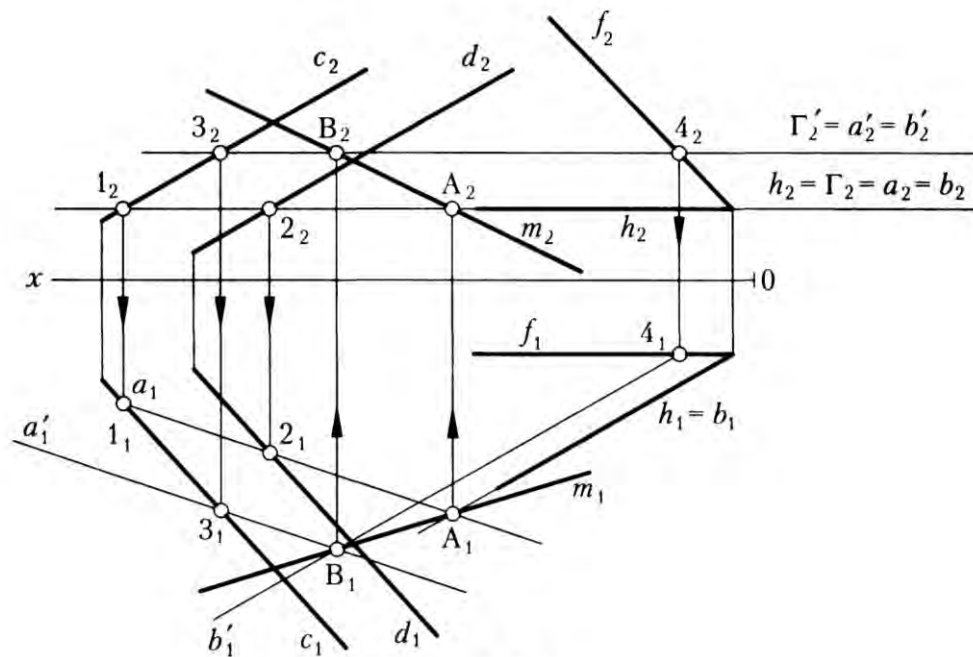


Рис. 2.4

1. Для знаходження лінії перетину $m(A, B)$ площин $\Sigma(c \parallel d)$ та $\Delta(h \cap f)$ використано допоміжні горизонтальні площини Γ та Γ' . Для спрощення побудови допоміжну площину Γ проводимо через горизонталь h площини $\Delta(h \cap f)$. Знаходимо перетин допоміжної площини із заданими: $\Gamma(\Gamma_2) \cap \Sigma(c \parallel d) = a(1, 2)$; $\Gamma(\Gamma_2) \cap \Delta(h \cap f) = b = h$.
2. Точка перетину ліній a та b : $a \cap b = A$.
3. Другу допоміжну площину Γ' проводимо паралельно до Γ . Тоді лінії a' та b' її перетину з площинами $\Sigma(c \parallel d)$ та $\Delta(h \cap f)$ визначаються відповідно точками 3 і 4 та паралельністю до прямих a і b . Перетин прямих a' і b' визначає точку B — другу точку визначника $m(A, B)$ лінії перетину площин Σ та Δ .

За цим алгоритмом можна розв'язати будь-яку задачу перетину двох площин.

У деяких окремих випадках алгоритм побудови лінії перетину двох площин може бути значно спрощено. Розглянемо такі випадки.

1. Дві площини $\Sigma(\Sigma_1)$ та $\Delta(\Delta_1)$ перпендикулярні до однієї й тієї самої площини проєкцій. Лінія перетину площин $\Sigma(\Sigma_1)$ та $\Delta(\Delta_1)$ являє собою проєкціювальну пряму m , слід-проєкція m_1 якої є точкою перетину слідів-проєкцій Σ_1 та Δ_1 (рис. 2.5).
2. Площини перпендикулярні до різних площин проєкцій. Проєкції лінії перетину площин збігаються з відповідними слідами-проєкціями площин (на рис. 2.6 – $\Theta(\Theta_1) \cap \Psi(\Psi_2) = m$).

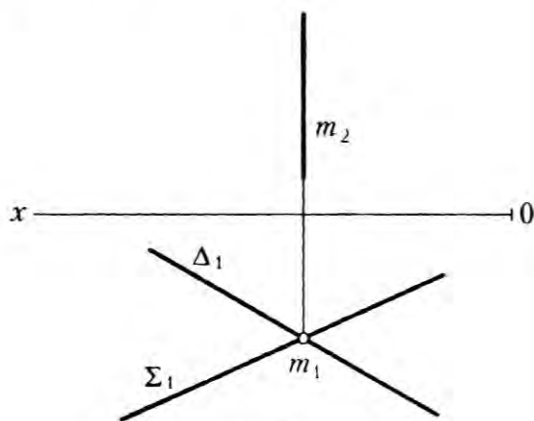


Рис. 2.5

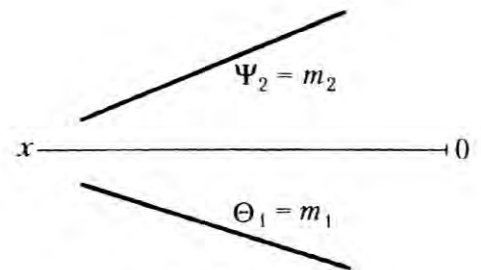


Рис. 2.6

3. Площини загального положення, які задано слідами — нульовими лініями рівня. У цьому разі площинами-посередниками є площини проєкцій, а точками визначника лінії перетину площин — точки перетину слідів площин (на рис. 2.7 – $\Sigma(h^0 \cap f^0) \cap \Delta(h^{0'} \cap f^{0'}) = m(M, N)$).

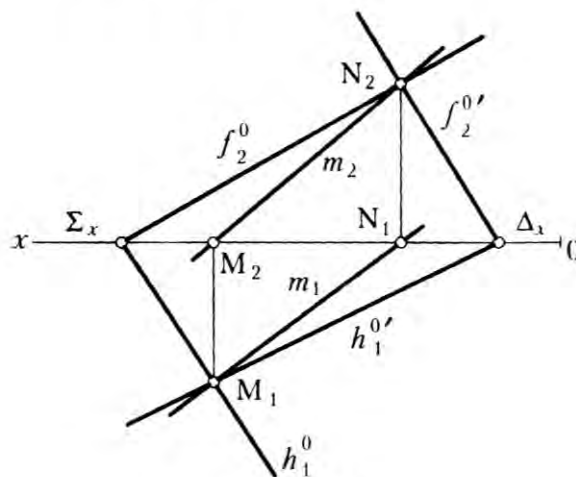


Рис. 2.7

4. Площини, які задано слідами так, що одна пара однойменних слідів паралельна. Лінія перетину визначається точкою перетину однієї пари слідів та напрямом паралельним до слідів іншої пари, перетин яких із лінією перетину слідів лежить у нескінченності (на рис. 2.8 – $m \parallel h^0$).

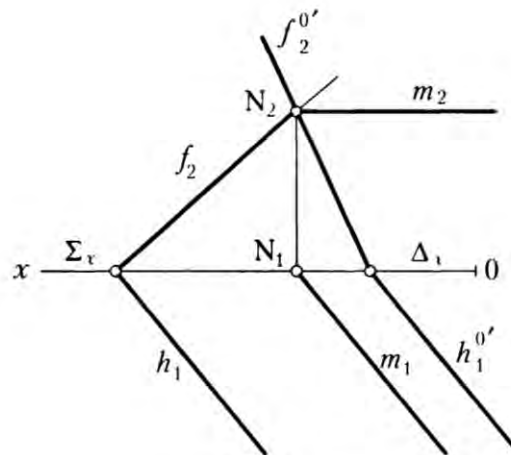


Рис. 2.8

Перетин прямої та площини

Ми вже розглядали алгоритм побудови точки перетину прямої та площини у випадку, коли пряма належить одній з двох площин, що перетинаються, і ми знаходимо точку її перетину з іншою площиною як таку, що належить лінії перетину двох площин (див. рис. 2.4).

Розглянемо модифікацію такого алгоритму для побудови перетину окремої прямої та площини загального положення.

Нехай пряма a перетинає площину загального положення Σ (рис. 2.9). Для знаходження точки її перетину з площиною ($K = a \cap \Sigma$) потрібно виконати такі дії.

1. Провести через пряму допоміжну проєкціювальну площину Γ та знайти лінію її перетину із заданою площиною Σ (модуль 2): $m(1, 2) = \Gamma \cap \Sigma$.
2. Знайти шукану точку K як точку перетину прямої m із прямою a : $K = m \cap a$.

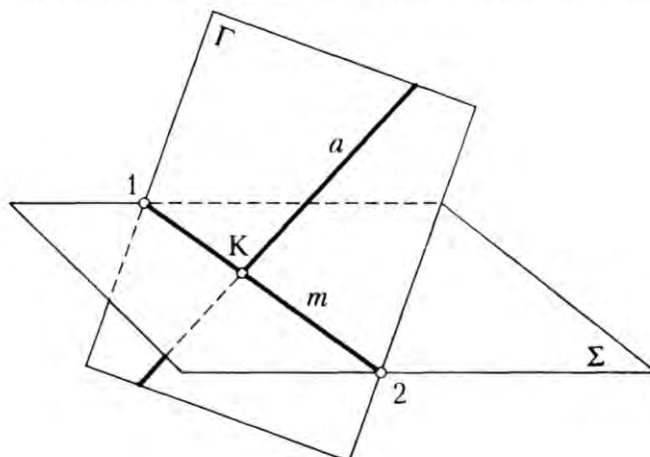


Рис. 2.9

На рис. 2.10, а показано реалізацію викладеного алгоритму на комплексному рисунку. Точку $K = \Sigma(\Delta ABC) \cap a$ знайдено за допомогою проєкціювальної площини Γ . Видимість ланок прямої встановлено за допомогою конкуруючих точок (на рис. 2.10, б - $y_3 > y_1$, точка $3 \in a$; $z_5 > z_4$, точка $5 \in a$).

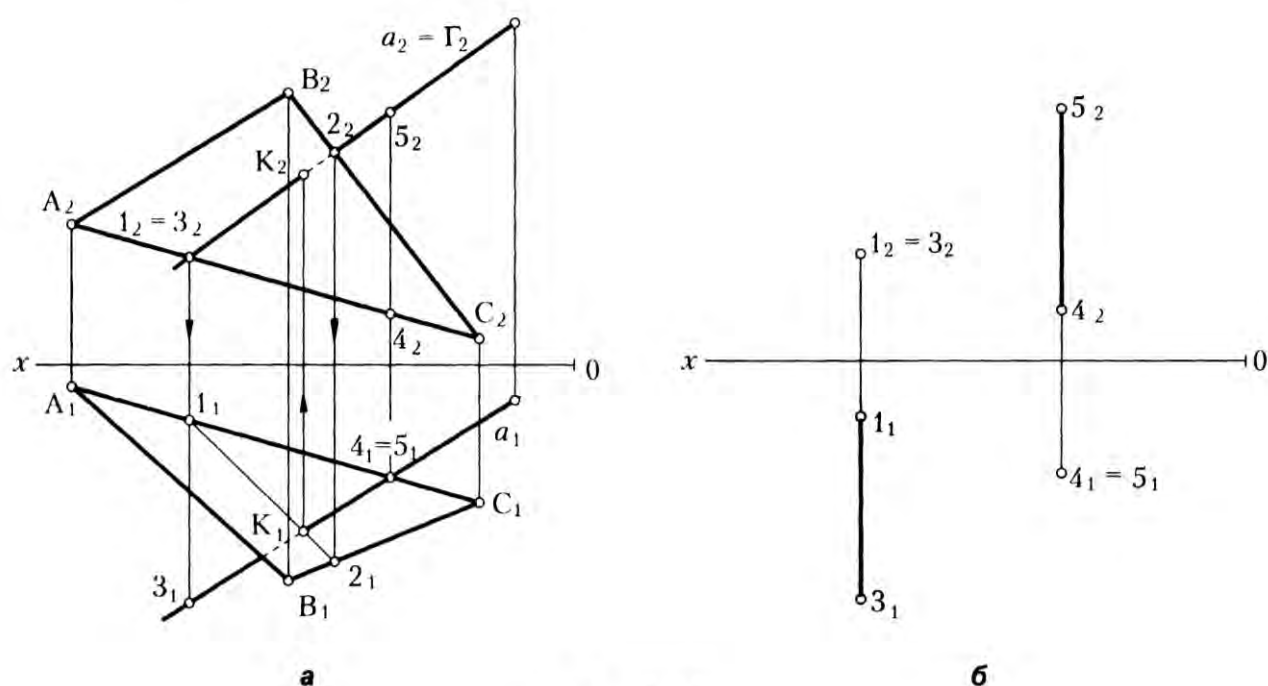


Рис. 2.10

За наведеним алгоритмом можна розв'язати будь-яку задачу перетину прямої та площини.

В окремих випадках алгоритм побудови точки перетину прямої та площини можна значно спростити. Це стосується, зокрема модуля 1. Наведемо ще один приклад. Нехай потрібно знайти точку перетину проєкціювальної прямої та площини загального положення (рис. 2.11). У цьому разі одна з проєкцій точки перетину збігається зі слідом-проєкцією прямої ($K_1 = a_1$), а другу можна знайти з умови належності точки площині. Видимість визначено за допомогою конкуруючих точок 3 та 4.

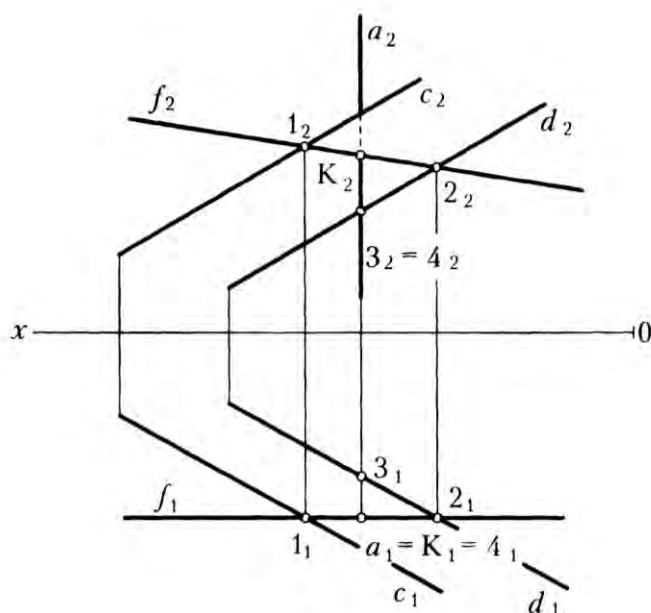


Рис. 2.11

2.1.2. Паралельність прямої та площини, паралельність площин

Пряма паралельна до площини, якщо вона паралельна до будь-якої прямої цієї площини. Побудова такої прямої є невизначеною задачею. Щоб задача була визначеною, потрібно додати ще одну умову — наприклад, побудувати пряму, паралельну до двох площин, тобто до лінії їх перетину. Про побудову паралельних прямих ішлося у підрозділі 1.2.2.

Дві площини паралельні, якщо дві прямі, що перетинаються, однієї площини паралельні до двох прямих, що перетинаються, другої. На рис. 2.12 показано побудову через точку K площини $\Delta(a \cap b)$, паралельної до площини $\Sigma(\Delta ABC)$. Пряма $a \parallel AB$, пряма $b \parallel BC$.

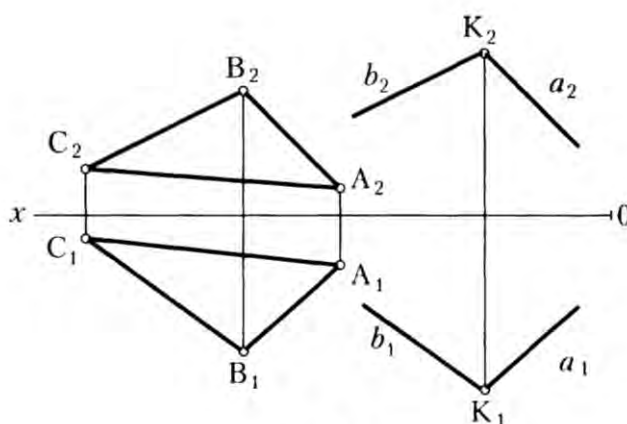


Рис. 2.12

2.1.3. Перпендикулярність геометричних елементів

Перпендикулярність прямої та площини

Пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перпендикулярна до двох прямих, що перетинаються, цієї площини.

На комплексному рисунку для побудови прямої, перпендикулярної до площини, потрібно, перш за все, з'ясувати, коли прямий кут між двома прямими проєкціюється у натуральну величину.

Теорема про проєціювання прямого кута. Прямий кут проєкціюється на площину проєкцій у натуральну величину, якщо хоча б одна з його сторін паралельна до цієї площини проєкцій.

На рис. 2.13 одна зі сторін h прямого кута $r \perp h$ паралельна до горизонтальної площини проєкцій P_1 . Якщо $h \perp r$ і $h \perp AA_1$, то $h \perp \Delta(r \cap AA_1)$, а $h_1 \perp r_1$.

Зауважимо, що перпендикулярні прямі можуть бути як такими, що перетинаються, так і мимобіжними. На рис. 2.14 проілюстровано застосування наведеної теореми. Якщо горизонтальну проєкцію прямої r визначено однозначно, то фронтальна —

мають бути лінії рівня (рис. 2.16). Справді, якщо між горизонтальними проекціями двох мимобіжних прямих r і h кут прямий, то пряма r та горизонталь перпендикулярні. Якщо між фронтальними проекціями двох мимобіжних прямих кут прямий, то пряма r та фронталь f перпендикулярні.

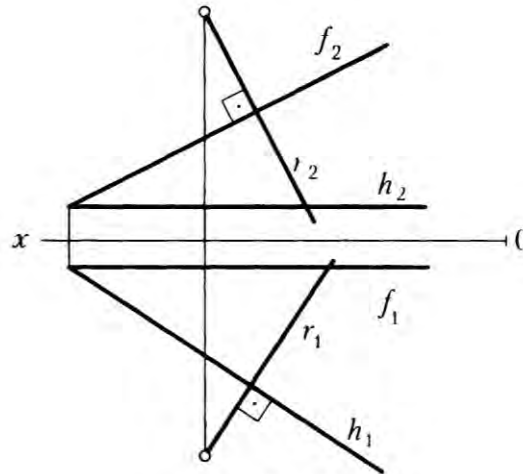


Рис. 2.16

Отже, пряма r перпендикулярна до двох прямих, що перетинаються, площини $\Sigma(h \cap f)$ і, як наслідок, перпендикулярна до площини.

Таким чином, якщо якась пряма перпендикулярна до площини $\Sigma(h \cap f)$, то на комплексному рисунку її горизонтальна проекція r_1 перпендикулярна до горизонтальної проекції горизонталі h_1 , а її фронтальна проекція r_2 — до фронтальної проекції фронталі f_2 :

$$r \perp \Sigma(h \cap f), \text{ якщо } r_1 \perp h_1, r_2 \perp f_2.$$

Наведене *правило* є основою *теорії перпендикулярності* в ортогональних проекціях. Правило перпендикулярності прямої та площини реалізується у двох основних задачах: через точку провести перпендикуляр до площини; через точку провести площину, перпендикулярну до прямої.

Задача 1. Побудувати перпендикуляр з точки до площини. Ця задача є модулем ширшого кола задач, а саме:

- визначання відстані від точки до площини або побудови сфери з центром у заданій точці та дотичної до площини;
- побудова точок, симетричних до заданих відносно площини;
- побудова геометричних фігур, які мають прямий кут, із вершиною у даній точці та стороною на площині тощо.

Розглянемо, наприклад, таку задачу.

Нехай задано якусь площину $\Sigma(\triangle ABC)$ та точку D . Знайти відстань від точки D до площини (рис. 2.17).

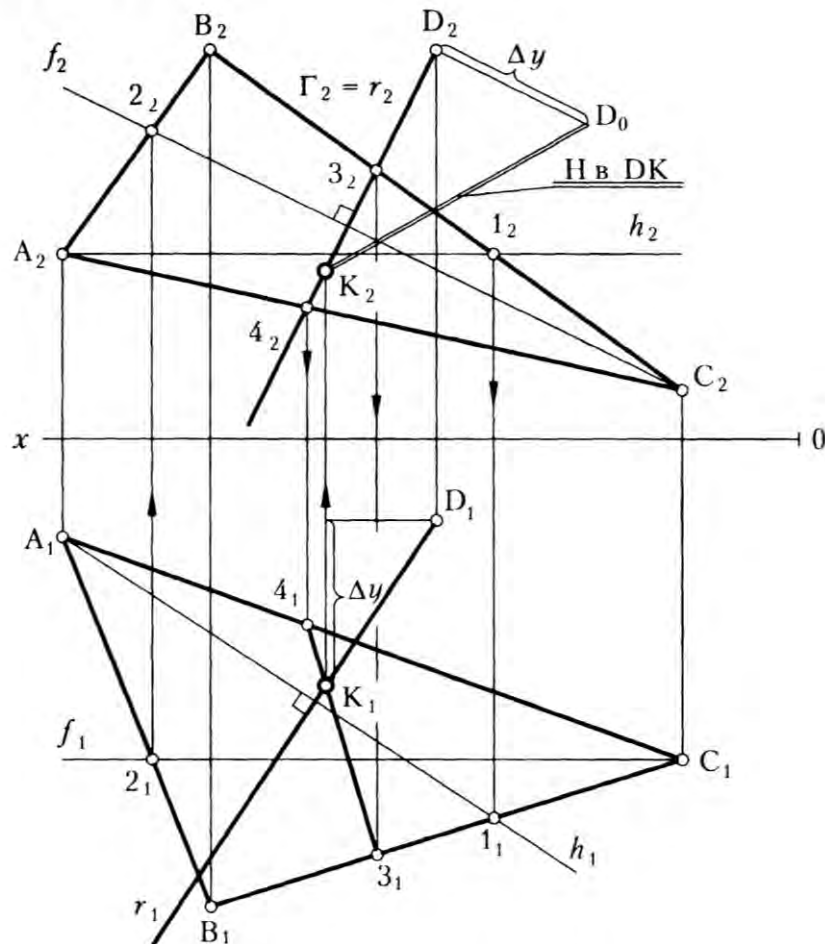


Рис. 2.17

Алгоритм розв'язання цієї задачі складається з трьох модулів.

1. З точки D провести перпендикуляр r до площини Σ .
2. Знайти K – точку перетину перпендикуляра з площиною.
3. Знайти $|DK|$ – натуральну величину відстані.

Задача 2. Через точку A провести площину Σ , перпендикулярну до прямої a .

Використовуючи основне правило теорії перпендикулярності в ортогональних проекціях, через точку A проводимо площину $\Sigma(h \cap f)$ таким чином, щоб на горизонтальній площині проекцій горизонтальна проекція h_1 горизонталі була перпендикулярною до горизонтальної проекції a_1 прямої, а на фронтальній

площині проєкцій фронтальна проєкція f_2 фронталі була перпендикулярною до фронтальної проєкції a_2 прямої. Реалізацію побудови показано на рис. 2.18.

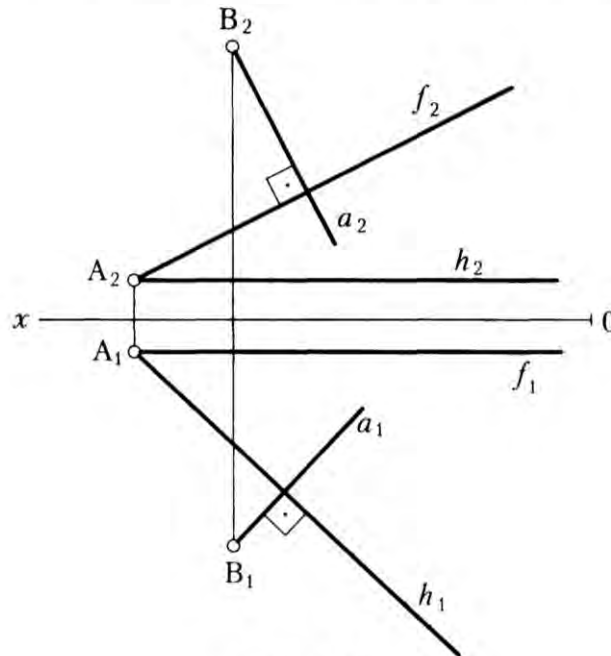


Рис. 2.18

Розглянута задача є модулем для розв'язання багатьох задач, а саме:

- визначення відстані від точки до прямої або побудови сфери з центром у цій точці та дотичної до прямої;
- побудова точок, симетричних до заданих відносно прямої;
- побудова геометричних фігур, які мають прямий кут із вершиною у цій точці та стороною на прямій;
- побудова геометричних місць точок, рівновіддалених від двох, трьох, чотирьох точок і т. д.

Розглянемо, наприклад, таку задачу.

Задано якусь точку A та пряму a . Знайти відстань від точки A до прямої a .

Алгоритм розв'язання цієї задачі складається з трьох модулів.

1. Через точку A провести площину $\Sigma(h \cap f)$, перпендикулярну до прямої a .
2. Знайти точку перетину прямої a та площини Σ ($\Sigma \cap a = K$).
3. Знайти натуральну величину відрізка $|AK|$.

Реалізацію наведеного алгоритму показано на рис. 2.19.

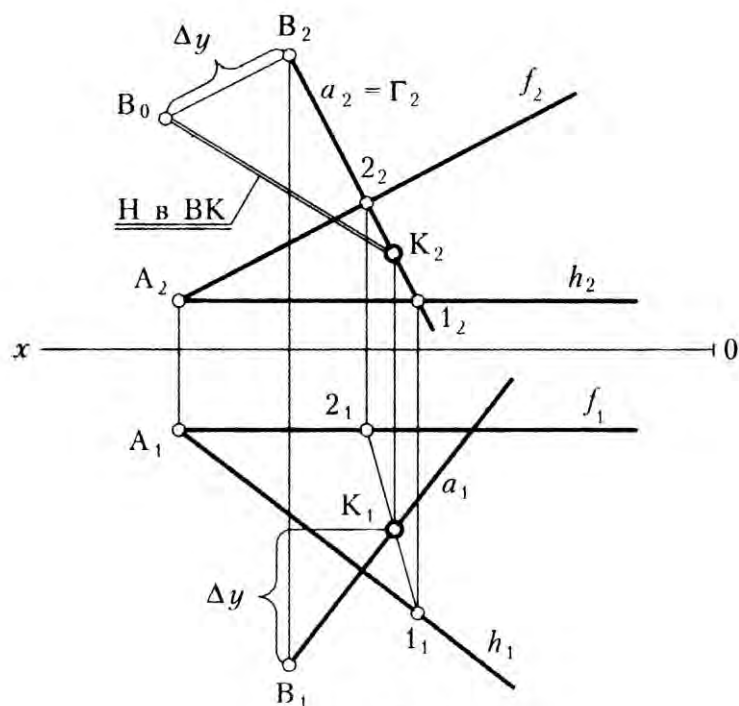


Рис. 2.19

Для площини окремого положення перпендикулярна до неї пряма — також окремого положення (на рис. 2.20 — $\Delta(\Delta_2) \perp f$; $\Sigma(\Sigma_1) \perp a$)

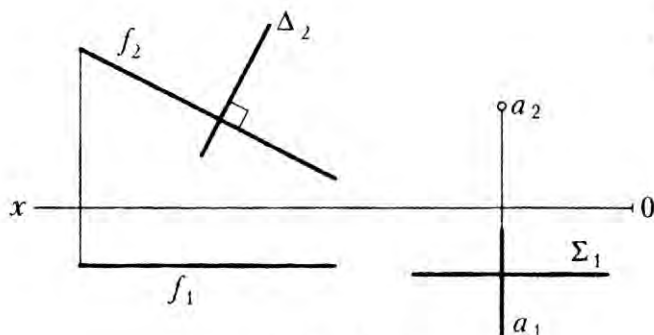


Рис. 2.20

Перпендикулярність двох площин

Дві площини перпендикулярні, якщо в одній із них можна побудувати перпендикуляр до другої площини. Задача побудови площини, перпендикулярної до іншої, або перевірки перпендикулярності двох площин базується на модулі побудови перпендикуляра до площини.

У першому випадку перпендикуляр доповнюють іншим геометричним елементом (точкою, прямою) для задання площини. Задача має нескінченну множину розв'язків.

У другому випадку слід перевірити належність перпендикуляра r до другої площини (рис. 2.21). Якщо $r \perp \Sigma$ належить площині Δ , то $\Sigma \perp \Delta$; якщо r' не належить Δ , то $\Sigma \nsubseteq \Delta$.

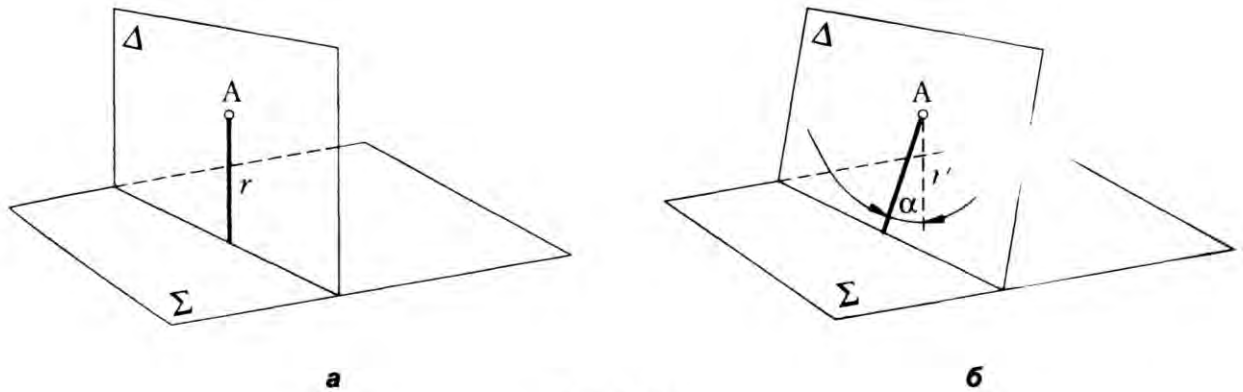


Рис. 2.21

На рис. 2.22 показано реалізацію перевірки перпендикулярності двох площин Σ та Δ на комплексному рисунку. З точки A площини Δ проведено перпендикуляр r' до площини Σ . Перпендикуляр r' не належить площині Σ , тому площини не перпендикулярні.

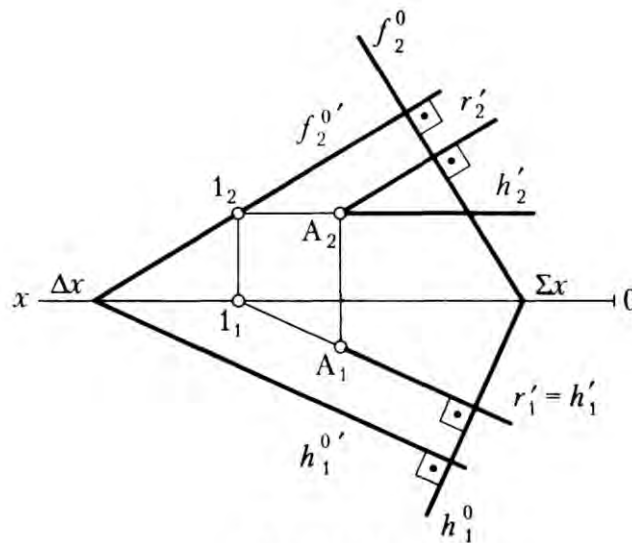


Рис. 2.22

Перпендикулярність двох прямих

Дві прямі перпендикулярні, якщо через одну з них можна провести площину, перпендикулярну до другої прямої. Задача побудови прямої, перпендикулярної до іншої, або перевірки перпендикулярності двох прямих, базується на модулі побудови площини, перпендикулярної до прямої.

У першому випадку пряма належить до побудованої площини. Задача має нескінченну множину розв'язків.

У другому випадку слід перевірити належність прямої площині Σ , перпендикулярній до другої прямої r (рис. 2.23). Якщо $a \in \Sigma$, прямі a та r перпендикулярні; якщо $a' \notin \Sigma$, то прямі a' та r не перпендикулярні.

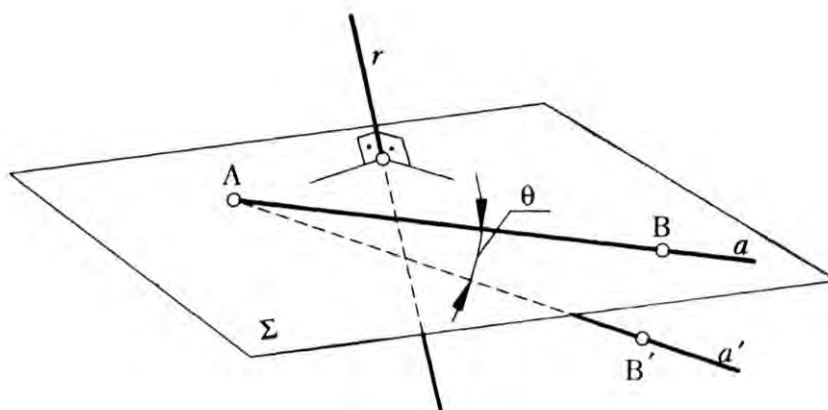


Рис. 2.23

Лінії найбільшого нахилу площини до площини проєкцій

Лінією найбільшого нахилу площини до площини проєкцій називають лінію, перпендикулярну до лінії рівня площини (рис. 2.24).

Площину можна задати лінією найбільшого нахилу, якщо в умові задачі обумовлено, до якої площини проєкцій її проведено.

За допомогою лінії найбільшого нахилу можна визначити кут нахилу площини до площини проєкцій (кут α на рис. 2.24).

На рис. 2.25 показано розв'язання такої задачі на комплексному рисунку. Тут B_2 — лінія найбільшого нахилу площини $\Sigma(\triangle ABC)$ до площини Π_1 , а кут α її нахилу до Π_1 є кутом нахилу площини $\Sigma(\triangle ABC)$ до площини Π_1 .

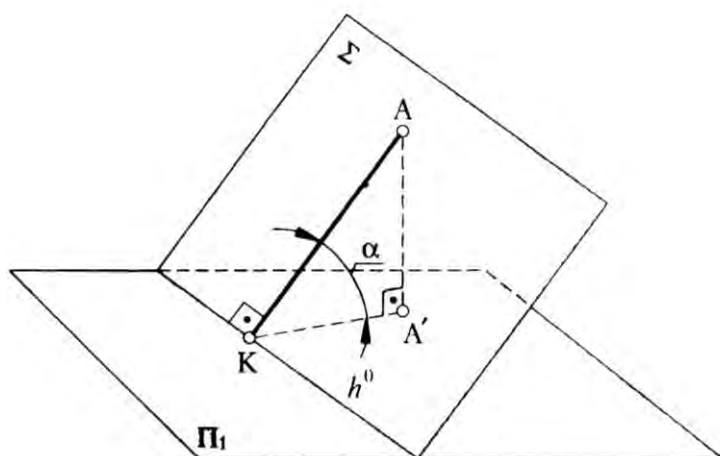


Рис. 2.24

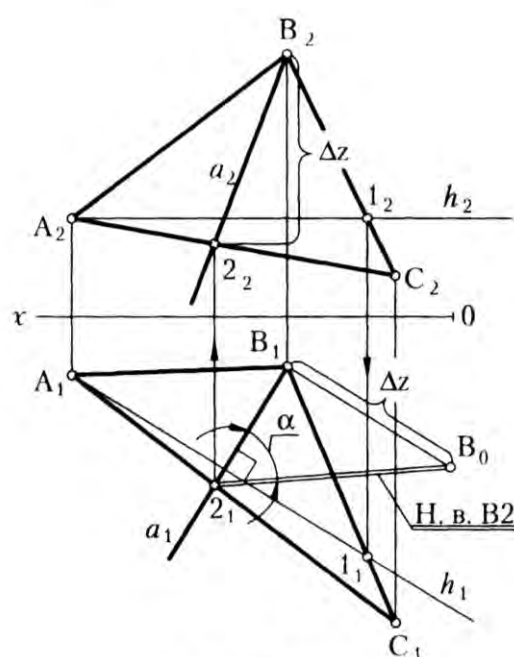


Рис. 2.25

2.2. Способи перетворення комплексного рисунка

За двома проекціями геометричного образу визначають його форму та положення в просторі. Однак розв'язання позиційних та метричних задач ускладнюється, якщо образ займає *загальне положення* відносно площин проекцій. Для спрощення розв'язання задач потрібні додаткові проекції, що відображають образ в *окремих положеннях*.

Побудову нових додаткових проекцій за заданими проекціями образу називають *перетворенням комплексного рисунка*. Таке перетворення можна здійснити: заміною даної системи площин проекцій новою системою; переміщенням геометричного образу в просторі; зміною напрямку проєкціювання.

Розглянемо деякі способи перетворення проєкцій образу.

2.2.1. Спосіб заміни площин проєкцій

Особливістю способу заміни площин проєкцій є перехід від заданої системи площин проєкцій, в якій відображено образ, до нової системи двох взаємно перпендикулярних площин проєкцій. Положення самого образу в просторі залишається незмінним. Для виконання такого переходу одну із заданих площин проєкцій замінюють проєкціуювальною площиною до другої площини проєкцій. Зокрема, на рис. 2.26, *а* і *б* показано перехід від системи площин проєкцій $\Pi_1 \perp \Pi_2$ до системи $\Pi_1 \perp \Pi_4$ заміною площини Π_2 іншою горизонтально-проєкціуювальною площиною Π_4 . На комплексному рисунку таку площину задають на площині Π_1 слідом-проєкцією x_1 , а перехід можна записати виразом

$$x \frac{\Pi_1}{\Pi_2} \rightarrow x_1 \frac{\Pi_1}{\Pi_4}.$$

Обидві системи абсолютно рівноправні.

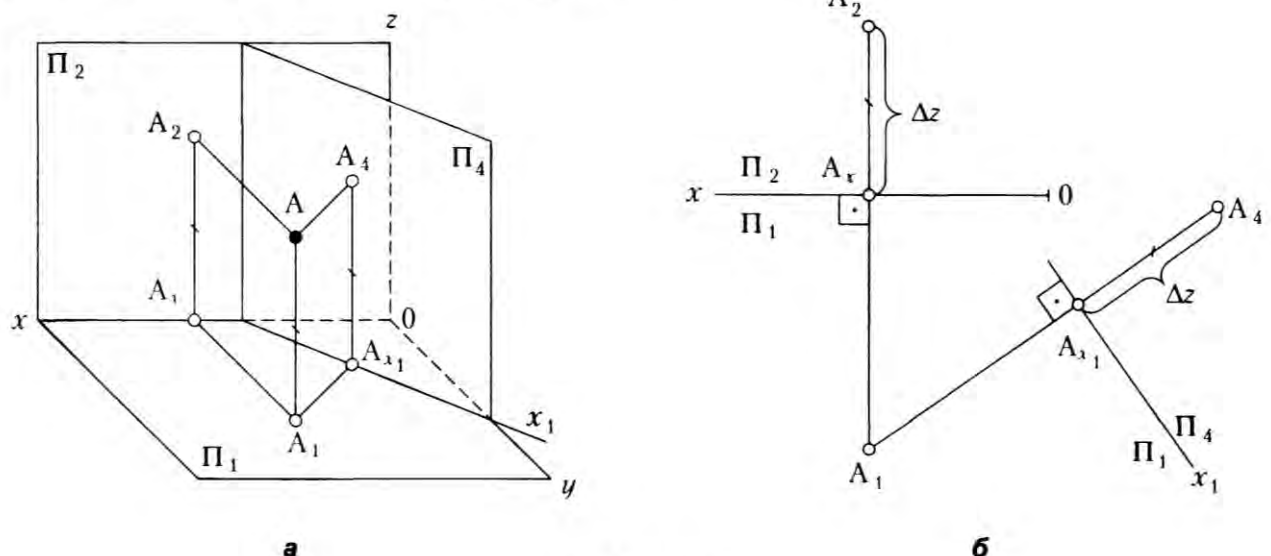


Рис. 2.26

Обидві площини Π_2 та Π_4 горизонтально-проекціювальні, внаслідок чого координати проєкцій точки A на ці площини, що фіксують відстані від площини Π_1 , однакові ($|A_x A_2| = |A A_1| = |A_4 A_{x_1}|$).

Побудова на комплексному рисунку (див. рис. 2.26, б) проєкції точки A в новій системі площин проєкцій полягає у виконанні таких дій:

- заданні нової площини проєкцій, перпендикулярної до однієї із заданих, її слідом-проєкцією (x_1);
- побудові нової проєкції точки (A_4), відстань якої від нової осі $|A_4 A_{x_1}|$ дорівнює відстані від замінюваної проєкції до замінюваної осі $|A_2 A_x|$.

Перетворення, які потрібно виконувати в ході розв'язування метричних і позиційних задач нарисної геометрії, побудовані на елементарних модулях. Розглянемо ці модулі.

Модуль 1. Перетворити пряму загального положення на пряму, паралельну до площини проєкцій.

Реалізацію цього модуля та схему її виконання показано на рис. 2.27. Спроеціювавши пряму AB на паралельну до неї площину Π_4 , отримаємо натуральну величину відрізка прямої та кут її нахилу до площини Π_1 .

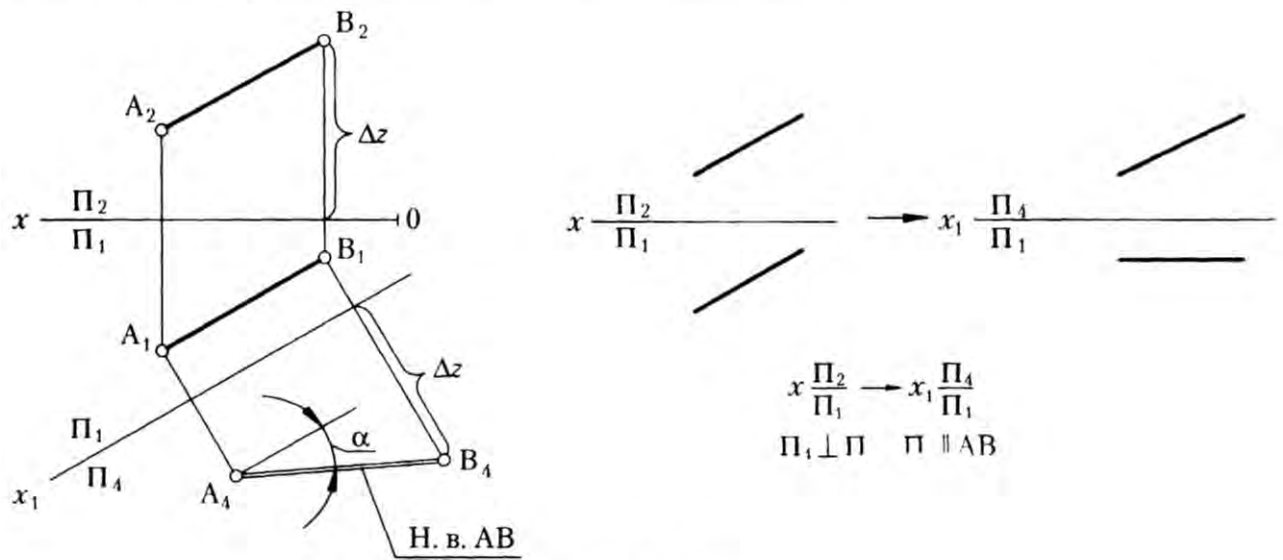


Рис. 2.27

Модуль 2. Перетворити пряму, паралельну до площини проєкцій, на проєціювальну.

Реалізацію цього модуля разом зі схемою її виконання показано на рис. 2.28. Нову площину Π_4 будують перпендикулярно до відрізка CD .

Модуль 1+2. Перетворити пряму загального положення на проєціювальну. Цей модуль складається з двох попередніх модулів, які виконуються послідовно.

За схемою модуля 1+2 розв'язують задачі визначення відстаней: від точки до прямої, між двома паралельними прямими, найкоротшої між двома мимобіжними прямими; визначення натуральної величини двогранного кута.

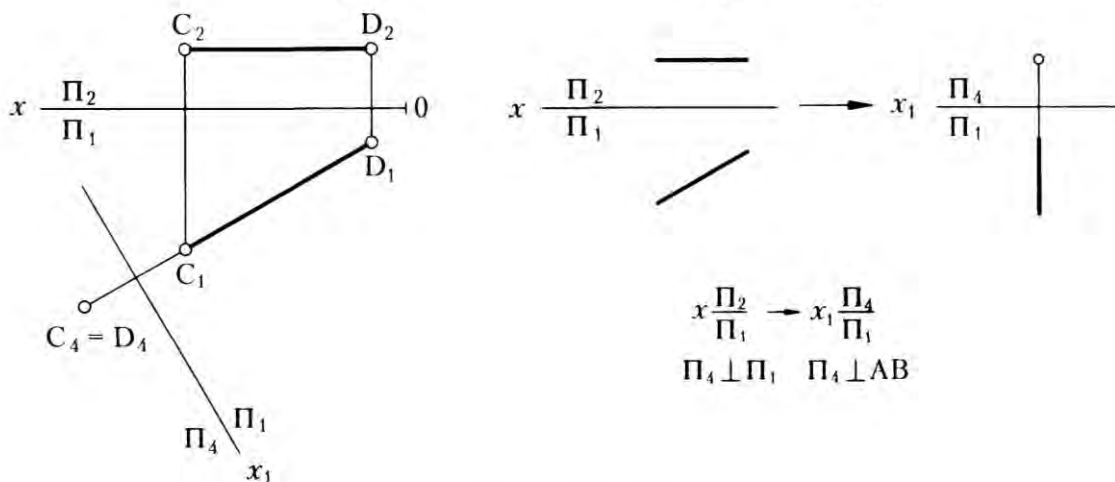


Рис. 2.28

На рис. 2.29 визначено відстань $|KN|$ між двома мимобіжними прямими AB та CD за схемою модуля 1+2 та побудовано проєкції найближчих точок K, N .

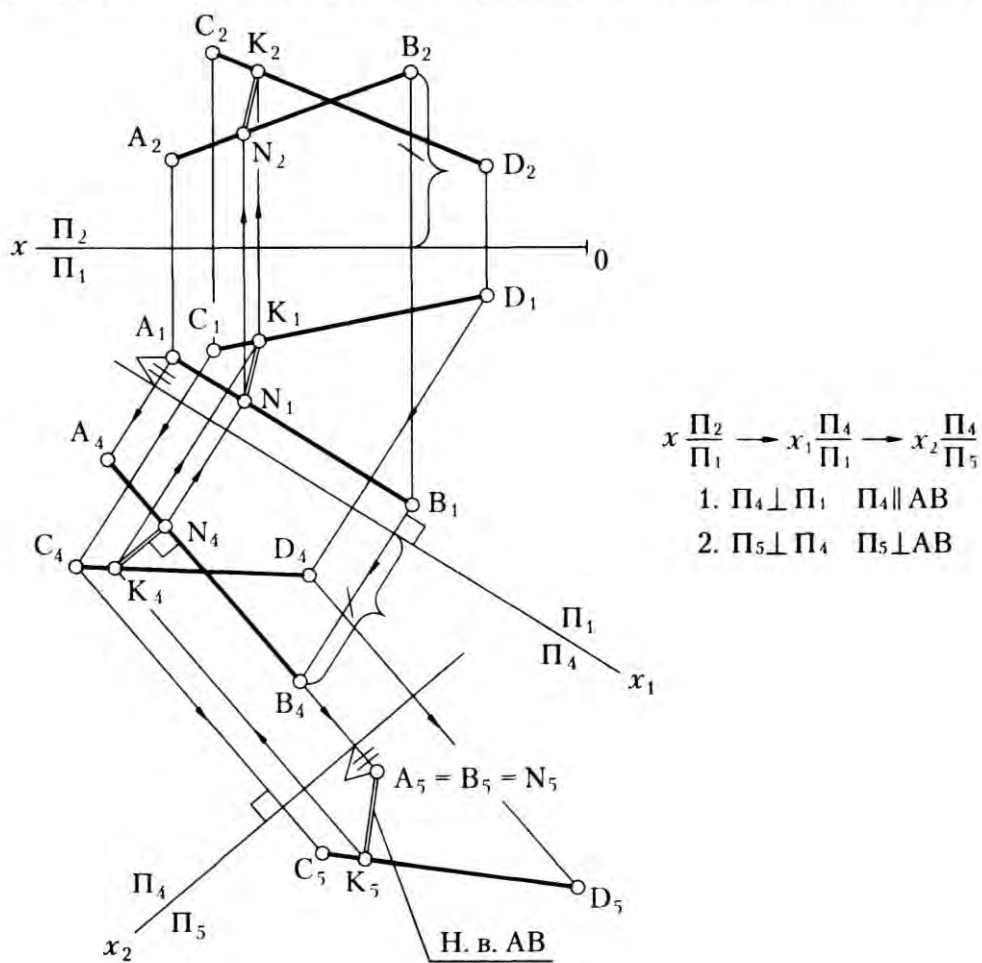


Рис. 2.29

Першим перетворенням (модуль 1) пряму АВ спроекційовано в пряму, паралельну до площини Π_4 , другим — у проекціювальну до площини Π_5 . Довжина відрізка НК перпендикуляра, опущеного з проекції $A_5 \equiv B_5$ прямої АВ на проекцію C_5D_5 прямої CD, дорівнює найкоротшій відстані між прямими АВ та CD.

Модуль 3. Перетворити площину загального положення на проекціювальну.

Схему цього модуля та його реалізацію на комплексному рисунку показано на рис. 2.30. Щоб площина $\Sigma(\Delta ABC)$ перетворилась на проекціювальну $\Sigma(\Sigma_4)$ відносно нової площини Π_4 , площину Π_4 потрібно побудувати перпендикулярно до горизонталей площини Σ . На Π_4 отримаємо слід-проекцію Σ_4 площини Σ та проекцію у натуральну величину кута α її нахилу до горизонтальної площини проєкцій.

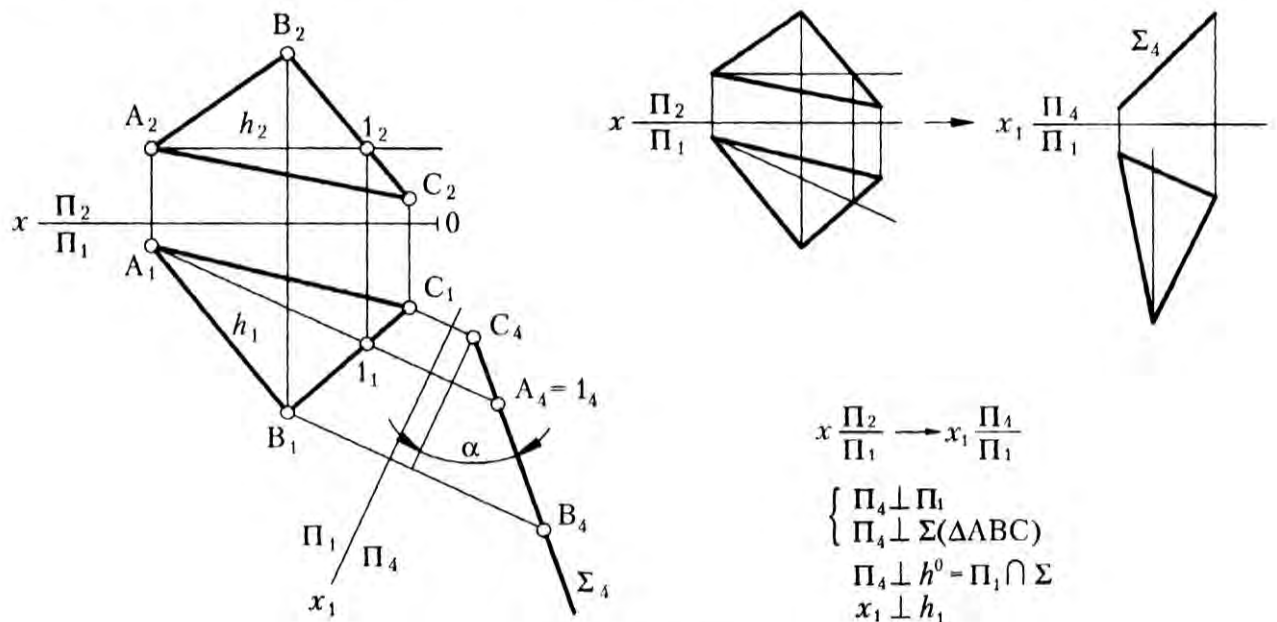


Рис. 2.30

За допомогою цього модуля розв'язують такі задачі:

- побудова відстаней між точкою та площиною, двома паралельними площинами;
- позиційні задачі знаходження перетину прямої та площини, двох площин.

На рис. 2.31 проілюстровано знаходження відстані МК від точки М до площини $\Sigma(a \parallel b)$. Відрізок МК паралельний до площини Π_4 .

Модуль 4. Перетворити проекціювальну площину на площину рівня.

Схему реалізації цього модуля та її виконання показано на рис. 2.32. Нову площину Π_4 будують паралельно до заданої $\Sigma(\Sigma_1)$. На площині Π_4 отримано натуральну величину трикутного відсіку ABC.

За схемою модуля 3+4 розв'язують задачі планіметрії. На рис. 2.33 показано знаходження центра K кола, описаного навколо трикутника ABC .

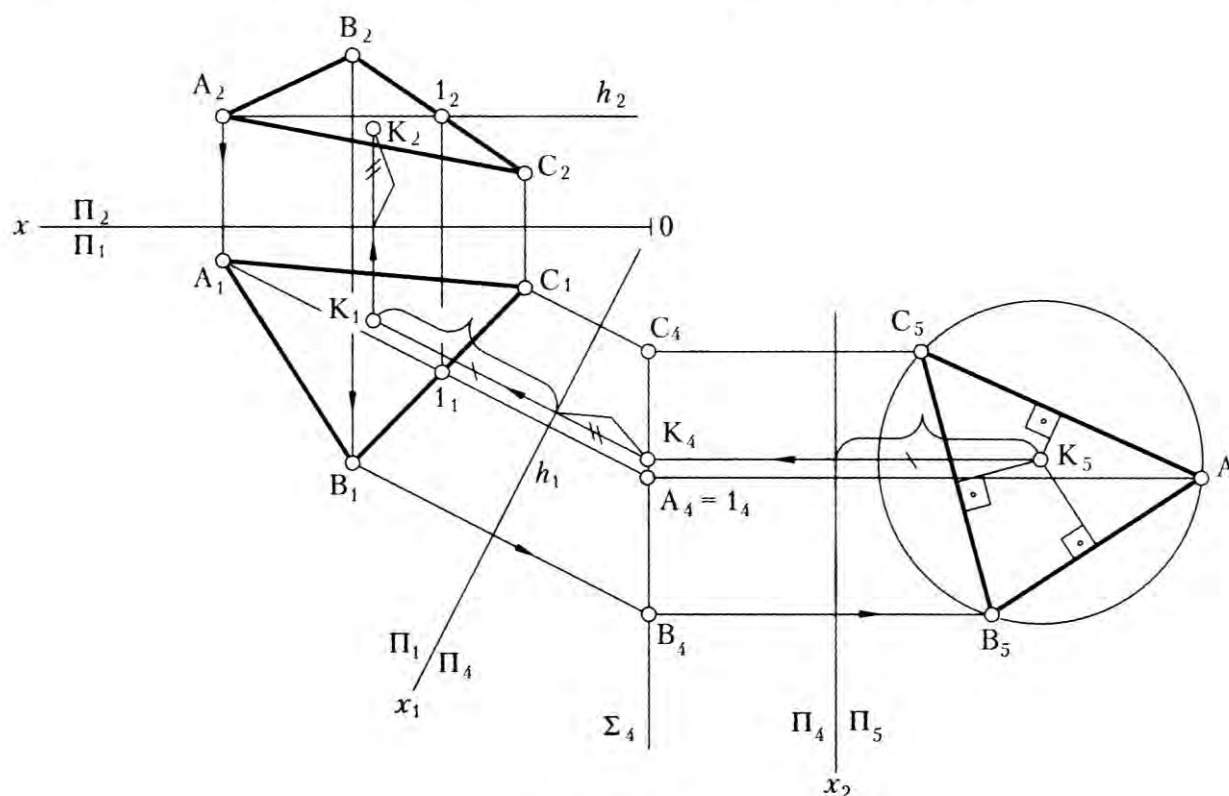


Рис. 2.33

2.2.2. Спосіб плоскопаралельного переміщення

Особливістю способу плоскопаралельного переміщення є перенесення образів із загального положення в окреме в разі зафіксованої системи площин проєкцій. Побудови на комплексному рисунку базуються на такій властивості: *якщо точки будь-якого об'єкта переміщуються у паралельних площинах, то проєкція цього об'єкта на таку площину та кут нахилу об'єкта до неї не змінюються.*

На рис. 2.34 точки прямої AB переміщуються в площинах, паралельних до Π_1 . Горизонтальна проєкція прямої AB та кут α її нахилу до площини Π_1 залишаються незмінними. Фронтальні проєкції точок прямої переміщуються по слідах-проєкціях паралельних площин. Наприклад, точка A переміщується у площині Σ , фронтальна проєкція точки A_2 — по сліду-проєкції Σ_2 .

На комплексному рисунку можна, наприклад, змінити положення горизонтальної проєкції, а за лініями зв'язку та слідами-проєкціями площин, у яких рухаються точки образу, побудувати фронтальну проєкцію.

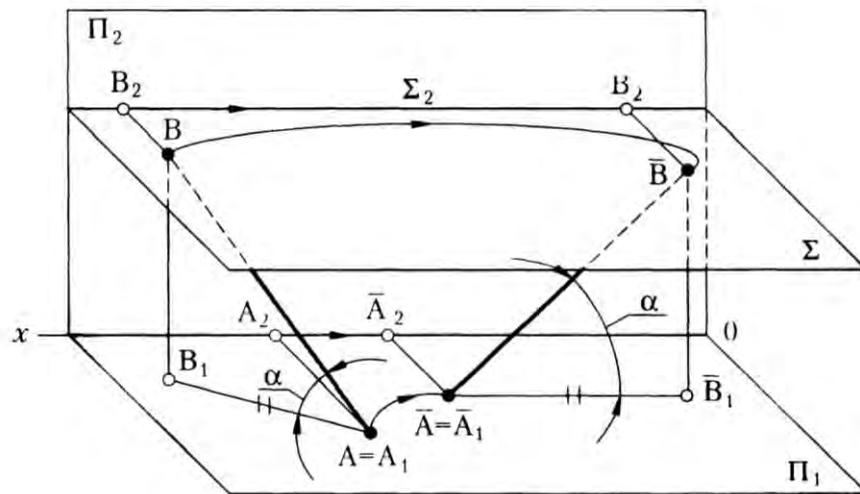


Рис. 2.34

Методом плоскопаралельного переміщення розв'язують такі самі задачі, як і методом заміни площин проєкцій.

На рис. 2.35 реалізовано модуль 1+2 (перетворення прямої загального положення на проєкціювальну). Реалізацію модуля 1 (отримання прямої, паралельної до площини проєкцій Π_2) здійснено переміщенням відносно площини Π_1 , а реалізацію модуля 2 (перетворення прямої, паралельної до площини Π_2 на горизонтально-проєкціювальну пряму) — переміщенням прямої щодо площини Π_2 .

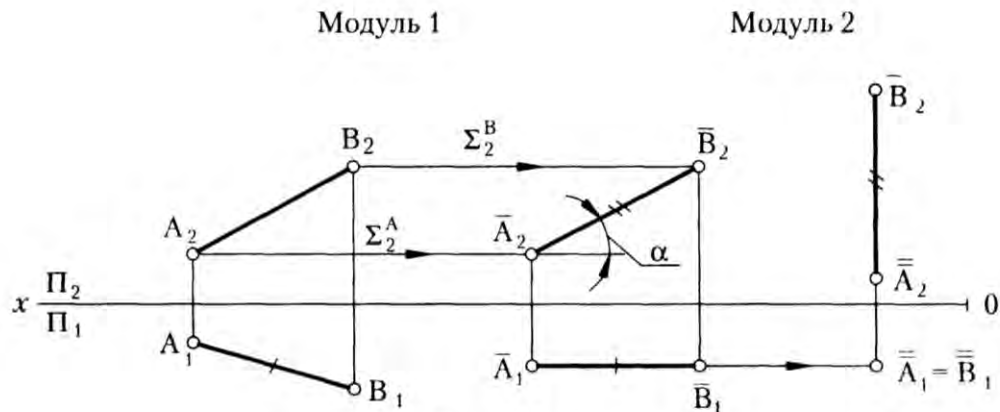


Рис. 2.35

Реалізацію модуля 3+4 (перетворення площини загального положення на площину рівня) показано на рис. 2.36. Площини, відносно яких виконано переміщення, було вибрано в тій самій послідовності, що й у попередньому випадку. На рис. 2.36 визначено натуральну величину трикутного відсіку площини $\Delta(\Delta ABC)$.

- відкласти вздовж сліду площини обертання Δ від проекції O_1 центра обертання натуральну величину радіуса обертання R^A точки A ;
- з'єднати отриману точку $\bar{A}_1$ з нерухомими точками $\bar{B}_1, \bar{C}_1$.

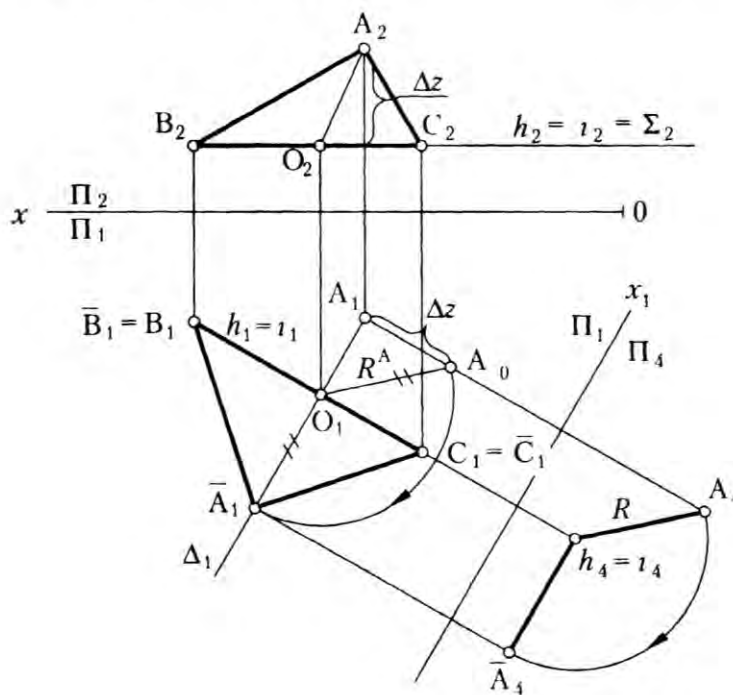


Рис. 2.39

Отримаємо шуканий трикутник $\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1$.

Якщо відсік необхідно повернути у просторі навколо горизонталі на будь-який кут, то можна скористатися методом заміни площин проекцій, спроекціювавши коло руху точки A на площину Π_4 , паралельну до площини обертання $\Delta(\Delta_1)$.

За допомогою методу обертання навколо лінії рівня можна знайти натуральну величину відсіку довільної форми, використавши зовнішню відносно контуру відсіку горизонталь або фронталь.

Використання зовнішньої горизонталі відсіку ABC для знаходження його натуральної величини та проекції центру K описаного навколо відсіку кола на комплексному рисунку показано на рис. 2.40. У цьому разі центр і радіус обертання знаходять лише для однієї точки A . Відповідність між будь-якими точками площини суміщення з відсіком $\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1$ та горизонтальною проекцією площини відсіку встановлюють за допомогою слідів-проекцій площин обертання відповідних точок (на рис. 2.40 — $\Delta_1^A, \Delta_1^K, \Delta_1^B, \Delta_1^C$), що дає змогу знайти на проекціях точку, відповідну будь-якій точці площини суміщення (наприклад, точці K).

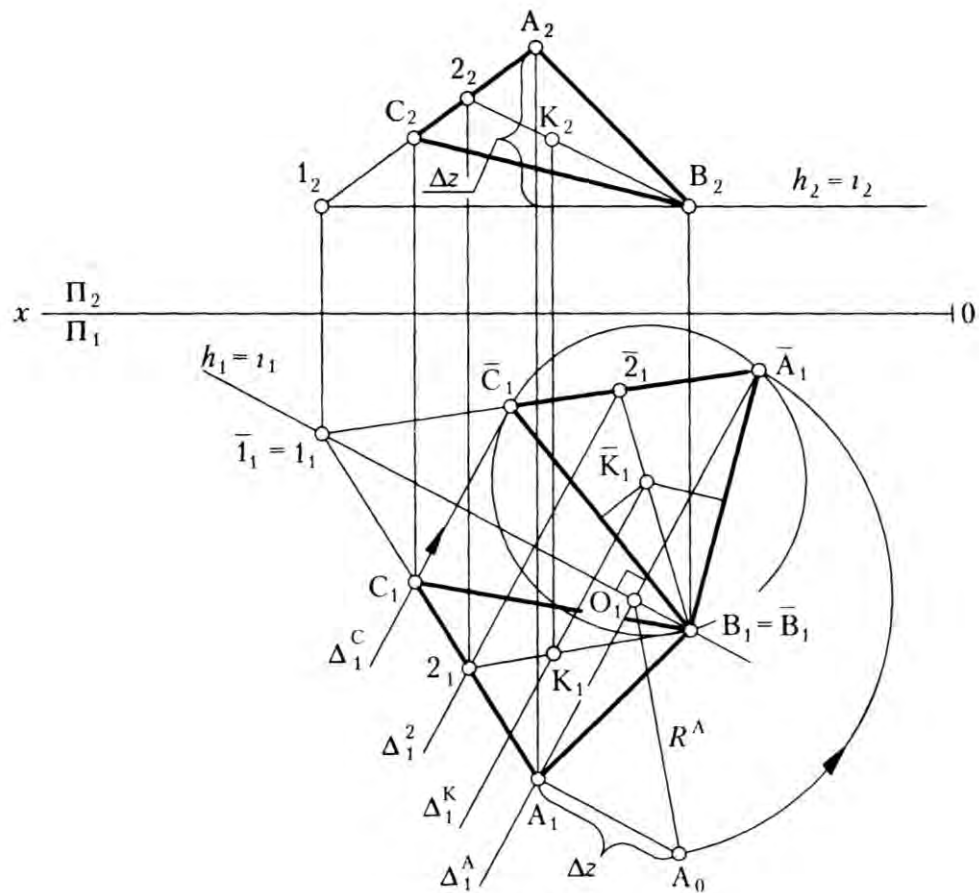


Рис. 2.40

Метод суміщення — це окремий випадок методу обертання навколо осей, паралельних до площини проєкцій, коли вісь обертання — нульова лінія рівня, а площина суміщення — площина проєкцій.

На рис. 2.41 показано визначення кута φ між слідами площини на комплексному рисунку методом суміщення. Для визначення кута φ обертаємо фронтальний слід f^0 площини $\Sigma(h^0 \cap f^0)$ навколо горизонтального сліду h^0 до суміщення з площиною Π_1 . Точка A , що належить нульовій фронталі f^0 , обертається навколо нульової горизонталі h^0 у площині обертання $\Delta^A(\Delta_1^A)$. Нове положення горизонтальної проєкції $\bar{A}_1$ точки A визначається перетином сліду-проєкції Δ_1^A та колом із центром у точці збігу слів Σ_x і радіусом, що дорівнює натуральній величині відрізка нульової фронталі від точки A до Σ_x .

На рис. 2.42 проілюстровано розв'язання оберненої задачі — визначення проєкцій контуру трикутного відсіку за заданим контуром та розміщенням у площині Σ . Проєкції точок трикутника знайдені з умови їх належності площині за допомогою її горизонталей.

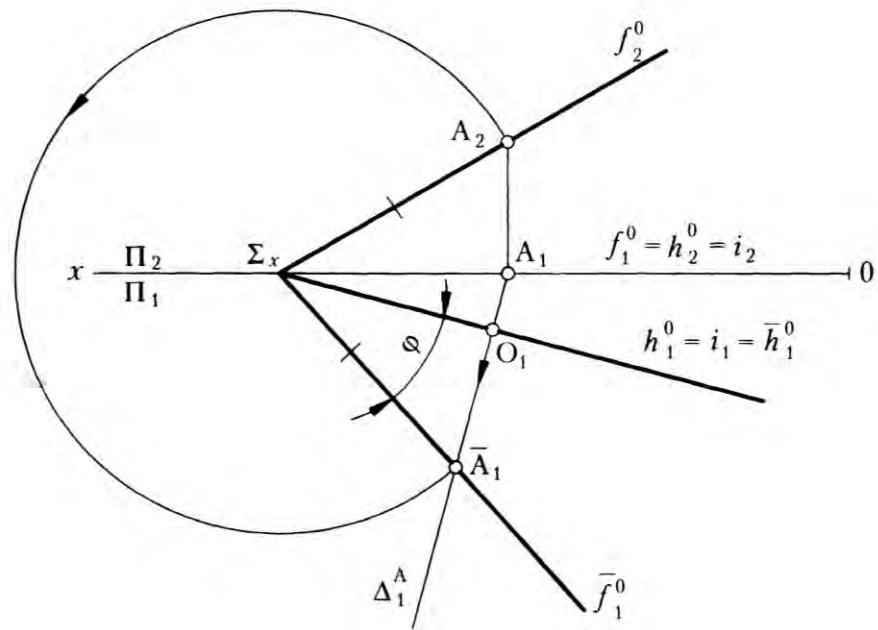


Рис. 2.41

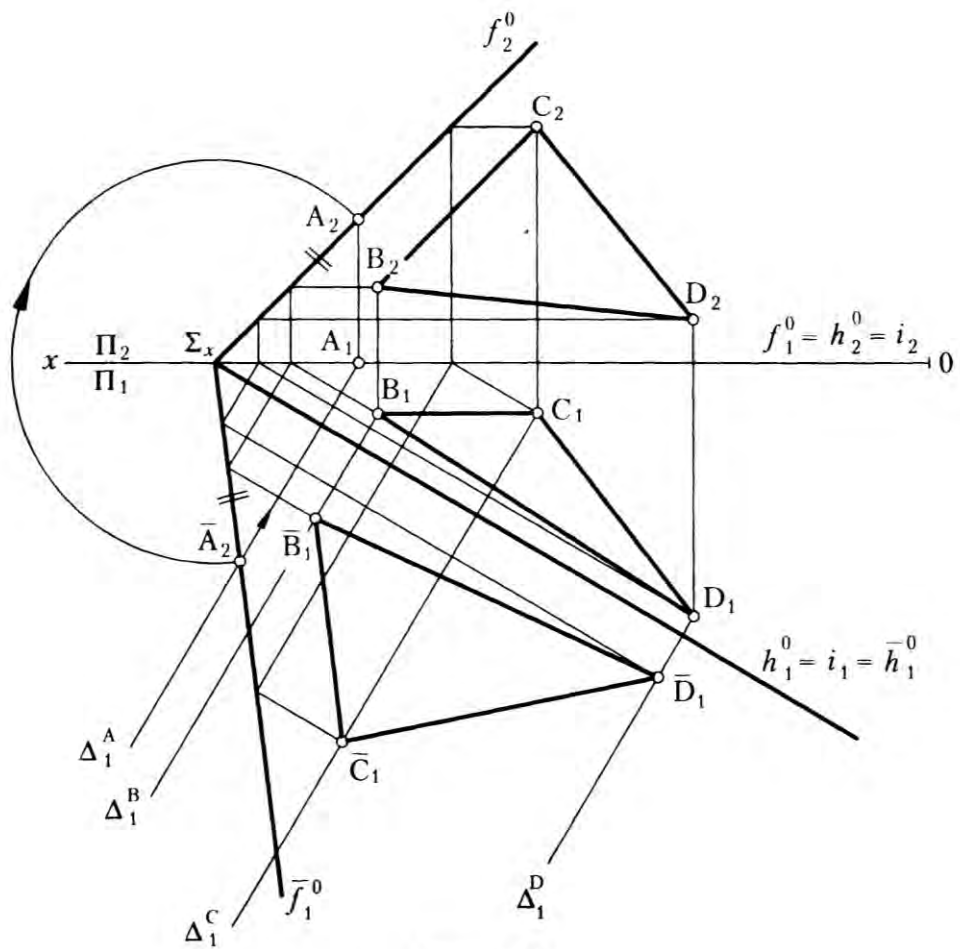


Рис. 2.42

2.2.4. Спосіб доповняльних кутів

Положення площини у просторі можна визначити за допомогою її нормалі. На цій властивості ґрунтується спосіб доповняльних кутів. Розглянемо дві задачі.

Задача 1. Визначити кут φ між прямою a та площиною Σ (рис. 2.43).

Якщо з довільної точки A прямої a провести перпендикуляр r до площини Σ , то кут φ можна визначити як такий, що доповнює до 90° кут ψ між прямою a та перпендикуляром r . Якщо отриманий кут $\psi' > 90^\circ$, то шуканий кут дорівнює $\psi' - 90^\circ$. Розв'язати таку задачу на комплексному рисунку можна будь-яким методом знаходження натуральної величини відсіку площини, наприклад методом обертання навколо лінії рівня — горизонталі площини $\Theta(a \cap r)$ (на рис. 2.44 — $\varphi = a \wedge \Sigma(h^0 \cap f^0)$).

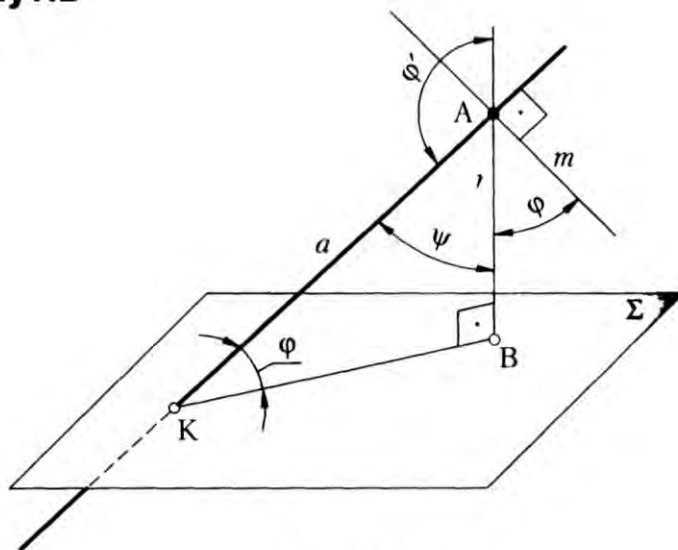


Рис. 2.43

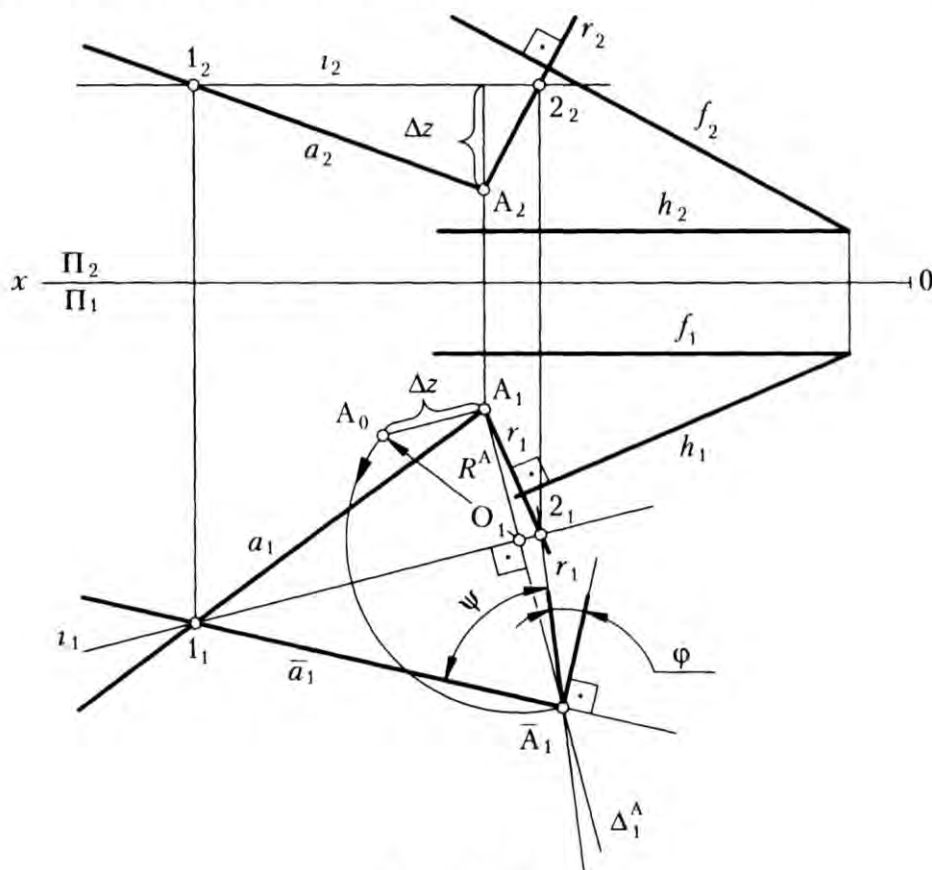


Рис. 2.44

Задача 2. Визначити кут φ між площинами Σ та Γ (рис. 2.45).

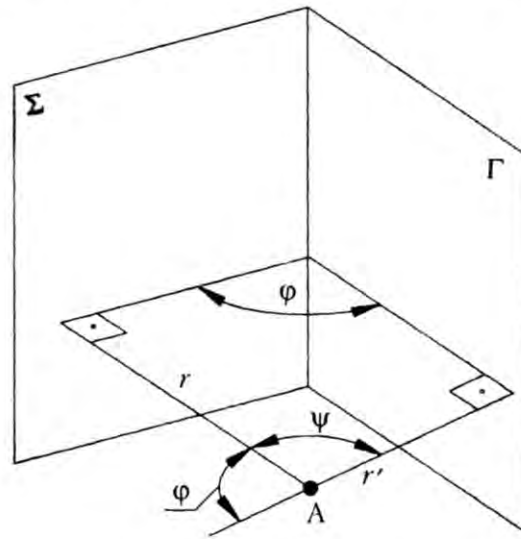


Рис. 2.45

Якщо з довільної точки A провести перпендикуляри r та r' відповідно до площин Σ та Γ , то у площині, яку утворюють перпендикуляри, кут φ буде дорівнювати $180^\circ - \psi$, де ψ – кут між перпендикулярами r та r' . На комплексному рисунку (рис. 2.46) визначено кут φ між площинами $\Sigma(h^0 \cap f^0)$ та $\Gamma(h' \cap f')$ за допомогою обертання площини $\Theta(r \cap r')$, яку утворюють перпендикуляри, навколо фронталі.

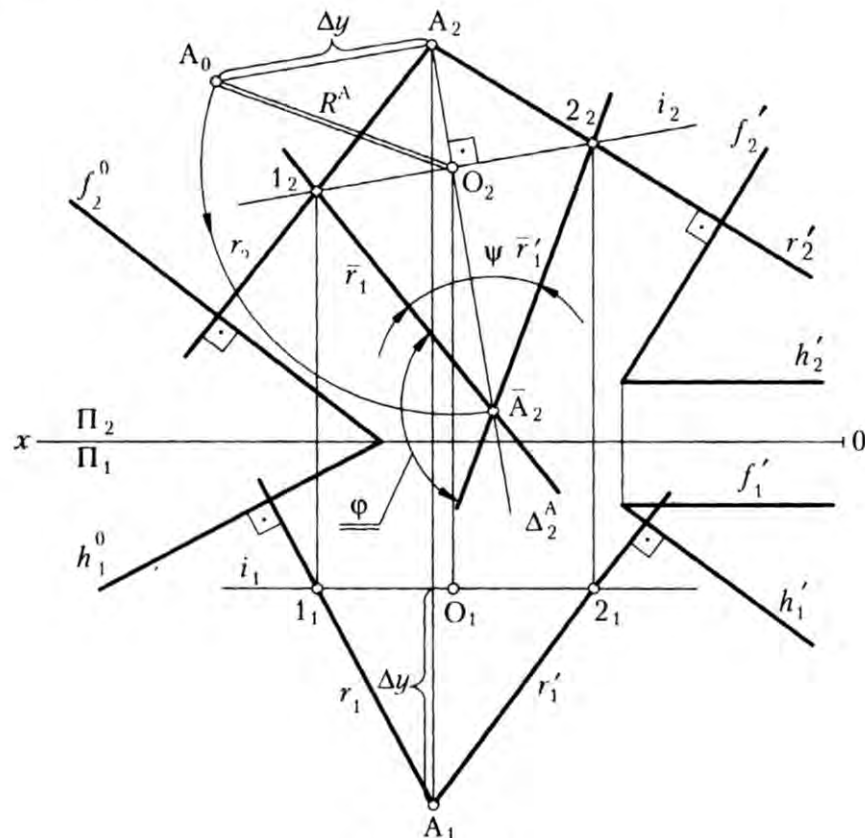


Рис. 2.46

Запитання для самоперевірки

1. Як можна розв'язати задачу перетину двох площин, прямої та площини?
2. За яких умов прямий кут проекціюється у натуральну величину на площину проекцій?
3. На якому правилі ґрунтується теорія перпендикулярності в ортогональних проекціях?
4. Як визначити натуральну величину відстані від точки до площини, від точки до прямої?
5. Як перевірити перпендикулярність двох площин, двох прямих?
6. Як визначити лінію найбільшого нахилу площини до площини проекцій?
7. Назвіть мету перетворення комплексного рисунка.
8. Які основні модулі способу заміни площин проекцій? Плоскопаралельного переміщення?
9. Як знайти натуральну величину трикутного відсіку площини обертанням навколо лінії рівня?
10. Які задачі спрощуються у разі розв'язування за допомогою доповняльних кутів?

Розділ 3

Моделювання кривих ліній та поверхонь

- ♦ Криві лінії
- ♦ Поверхні
- ♦ Розгортки поверхонь

3.1. Криві лінії

3.1.1. Загальні відомості

Криві лінії широко застосовують у різних галузях техніки.

У нарисній геометрії *криву лінію (криву)* прийнято розглядати як траєкторію руху точки. Така лінія *неперервна*. Крива лінія може бути межею поверхні виробу чи лінією перетину двох поверхонь, а також бути графіком якогось експерименту тощо.

Криву називають *плоскою*, якщо всі її точки належать одній площині. Криву, точки якої не належать одній площині, називають *просторовою*. Коло та гвинтова лінія є відповідно прикладами плоскої та просторової кривих ліній.

Напрямок руху точки у кожному положенні можна визначити *дотичною прямою (дотичною) t* у даній точці M кривої лінії m . Зі зміненням положення дотичної змінюються *локальні характеристики кривої*, тобто її характеристики на нескінченно малій ділянці околу точку кривої. Локальні властивості кривих вивчає диференціальна геометрія. Наближено деякі з таких характеристик можна визначити графічно.

Дотична t до кривої m у точці M займає *граничне* положення січної MN , коли точка N уздовж кривої m наближається до точки M . *Нормаль n* до кривої m у точці M належить площині кривої та перпендикулярна до дотичної t (рис. 3.1).

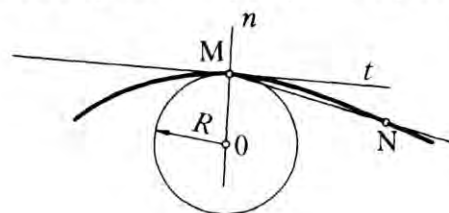


Рис. 3.1

Криву називають *гладкою (регулярною)*, якщо у кожній її точці існує тільки одна дотична. Швидкість змінення кута суміжності між двома положеннями дотичних в околі точки M кривої m характеризує кривину K кривої m у точці M . Кривину K кривої вимірюють радіусом R кола кривини, проведеного через точку M та дві нескінченно близькі до нього точки. Кривина K є величиною, оберненою до радіуса R .

Криву називають *закономірною*, якщо вона формується за певним законом, і *незакономірною*, якщо вона формується емпірично.

Закономірні криві лінії можна задавати креслеником і аналітично — рівнянням, а незакономірні — лише креслеником.

Закономірні криві лінії поділяють на алгебричні, задані в декартових координатах алгебричними рівняннями, та трансцендентні, задані неалгебричними рівняннями.

Порядком алгебричної кривої називають степінь її рівняння.

Геометрично порядок плоскої алгебричної кривої можна задати кількістю точок її перетину з прямою, просторової кривої — кількістю точок її перетину з площиною.

Ортогональні проекції кривих є кривими того самого чи нижчого порядку.

Незакономірну криву, як правило, задають або таблицею координат її точок, або креслеником — початковою кривою.

Знаходження аналітичних залежностей, які точно чи наближено відповідають значенням функцій у точках незакономірної кривої, — одна із задач геометричного моделювання технічних процесів та виробів.

Якщо знайдена аналітична залежність точно відповідає табличним даним точок кривої, то маємо задачу *інтерполяції* функцій; якщо ж вона наближається в межах заданої точності — задачу *апроксимації* кривої.

Інтерполяція дає змогу визначити наближені значення функцій у точках, що лежать між заданими табличними. Для знаходження значень функції найчастіше використовують поліноміальні залежності. У цьому разі аналітична функція, що її використовують для інтерполяції, має вигляд

$$F(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n,$$

де $a_0, a_1, \dots, a_n$ — коефіцієнти полінома, n — степінь полінома (ціле додатне число).

Залежно від вимог моделювання використовують різну кількість членів полінома — вузлів інтерполяції, щоб забезпечити таку інтерполяцію:

- два вузли — лінійну (рис. 3.2);
- три вузли — поліномом другого степеня (квадратичною параболою) (рис. 3.3);
- чотири вузли — поліномом третього степеня (кубічною параболою).

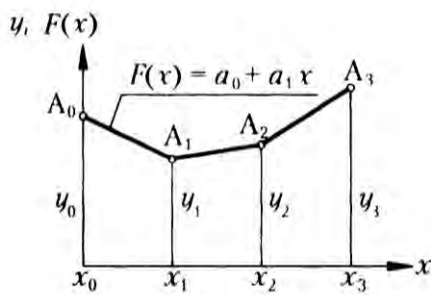


Рис. 3.2

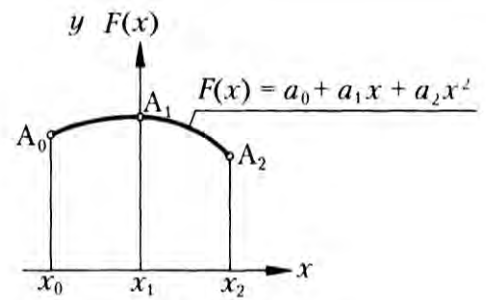


Рис. 3.3

У загальному випадку через $(n + 1)$ вузлів інтерполяції можна провести криву, яка відповідає єдиному поліному (рис 3.4)

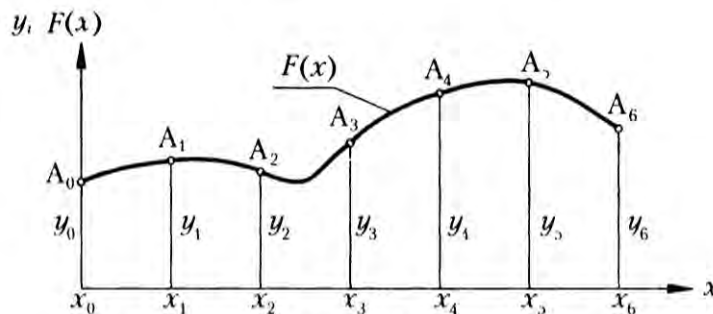


Рис. 3.4

Для інтерполяційних поліномів використовують інтерполяційні формули Лагранжа, Ньютона, Стірлінга, Бесселя, Ерміта й інші

Одним із поширених методів обробки дискретно заданих кривих є інтерполяція кубічними сплайнами

Сплайн-інтерполяція моделює форму пружної осі гнучкої пружної рейки, що проходить через усі вузли інтерполяції. Ділянки між вузлами відповідають графіку полінома третього степеня (кубічної параболи)

Інтерполяцію дискретних значень функції поліномами та сплайнами реалізовано в пакеті MathCAD

Апроксимацію функцій та початкових технічних кривих широко застосовують у геометричному моделюванні виробів, вона базується на наближеній рівності табличних даних і даних, що випливають з аналітичної залежності. Процедuru апроксимації можна реалізувати безліччю способів, які залежать від виду аналітичної залежності

Зокрема, на практиці широко використовують апроксимацію кривих методом Безьє, в основу якої покладено апроксимацію многочленами Бернштейна. Ці многочлени рівномірно сходяться до апроксимованої функції зі збільшенням кількості членів. Метод кривих Безьє широко застосовують у комп'ютерній графіці для побудови гладких довільних кривих

У практиці літакобудування найуживанішим є спосіб кривих другого порядку, що зумовлено їх простотою та наочністю, зручністю та передбачуваністю їх формування.

Криву другого порядку, як правило, задають трьома точками (початковою, проміжною та кінцевою) та двома дотичними (у початковій і кінцевій точках), що формують п'ять геометричних умов визначення кривої другого порядку (рис. 3.5).

Дотичні у початковій (А) та кінцевій (С) точках задають точкою їх перетину В, яку називають вершиною. Точку Е називають проміжною. Її задають перетином медіани ВD трикутника АВС за допомогою спеціального коефіцієнта

$$f = \frac{DE}{DB}.$$

Коефіцієнт f називають *дискримінантом кривої другого порядку*. За ним можна визначити до якого типу кривих другого порядку належить дана крива. Наприклад, у разі $f < 0,5$ крива є частиною еліпса; $f = 0,5$ — частиною параболи; $f > 0,5$ — частиною гіперболи.

Дискримінант характеризує опуклість кривої. У літакобудуванні дискримінант стандартизовано в проміжку 0,3—0,4.

Якщо криву задано таким способом, то на кресленнику можна побудувати достатню кількість її точок або знайти рівняння кривої у вигляді

$$y = F(x) \text{ та } x = F_1(y).$$

Задані конструктором контури перерізів агрегатів апроксимують первинною кривою, замінюючи їх однією або декількома спряженими між собою кривими другого порядку (рис. 3.6). Отриманий контур називають *обводом*, а точки стику кривих — *вузлами обводу*.

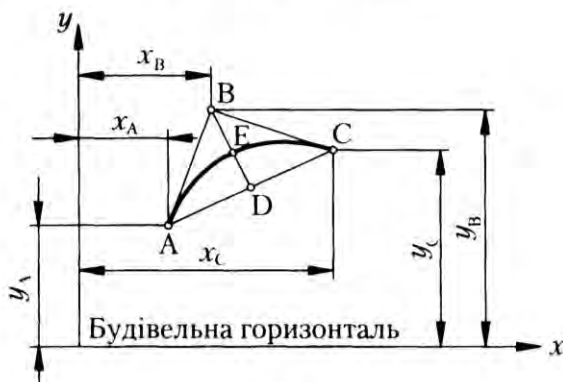


Рис. 3.5

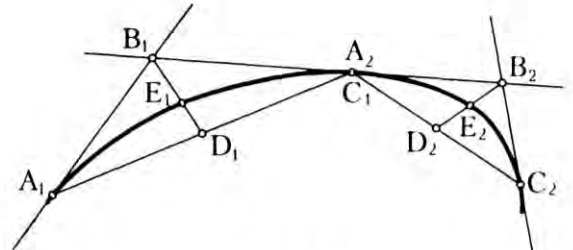


Рис. 3.6

Одержаний обвід має *гладкість першого порядку*, оскільки має спільні дотичні у вузлах обводу. Якщо у вузлах обводу криві мають однакові радіуси кривини, то такий обвід називають *обводом другого порядку гладкості*.

3.1.2. Проекціювання кола

Ортогональні проекції кривих являють собою криві того самого чи нижчого порядку.

Розглянемо проекціювання кривих на прикладі кола. Можливі три положення кола відносно площин проекцій.

1. *Коло належить площині рівня.* У такому разі на одну з площин проекцій коло проекціюється у натуральну величину, на інші — відрізками прямої, що дорівнюють діаметру кола, на сліди-проекції площини рівня.
2. *Коло належить проекціювальній площині.* На одну з площин проекцій коло проекціюється відрізком прямої, який дорівнює діаметру кола, на слід-проекцію проекціювальної площини, на інші — еліпсами, проекції головних осей яких відповідають спряженим діаметрам кола. Велика вісь еліпса дорівнює діаметру, а мала — проекції діаметра кола, що проекціюється у натуральну величину на слід-проекцію проекціювальної площини (рис. 3.7).

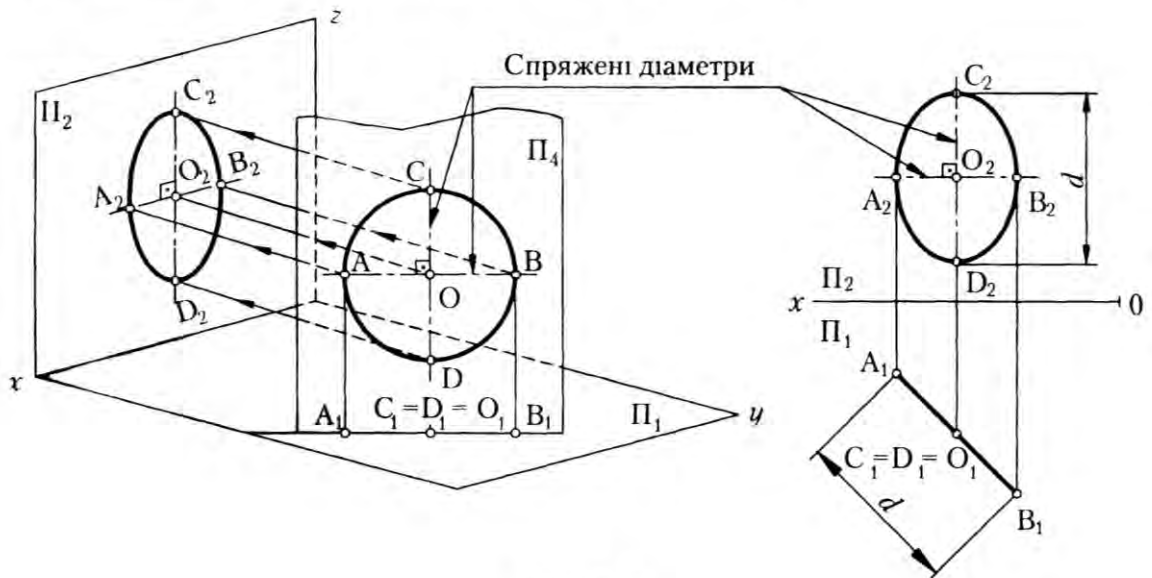


Рис. 3.7

Зауважимо, що кожену точку еліпса (проекції кола) можна визначити з умови її належності площині кола, побудувавши будь-яким методом натуральну величину відсіку площини з колом (наприклад, замінивши площини проекцій). Така процедура потребує значних графічних побудов.

На практиці, як правило, використовують інший метод побудови еліпса за двома головними осями, що базується на афінному розтягуванні та стисканні двох кіл, діаметри яких — відповідно велика та мала осі еліпса. Таку побудову показано на рис. 3.8.

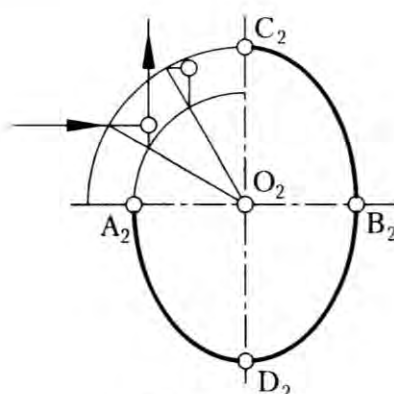


Рис. 3.8

3. Коло належить площині загального положення. Коло проєкціюється на всі площини проєкцій еліпсами, великі осі яких розташовані на лініях рівня площин, а малі — на відповідних лініях найбільшого нахилу площини загального положення. Довжина малої осі для кожної проєкції являє собою довжину проєкції відрізка, який належить площині кола та дорівнює його діаметру. Можна, наприклад, замінити площини проєкцій (див. модуль 1 або 3, підрозділ 2.2), що зводить задачу до попередньої (рис. 3.9).

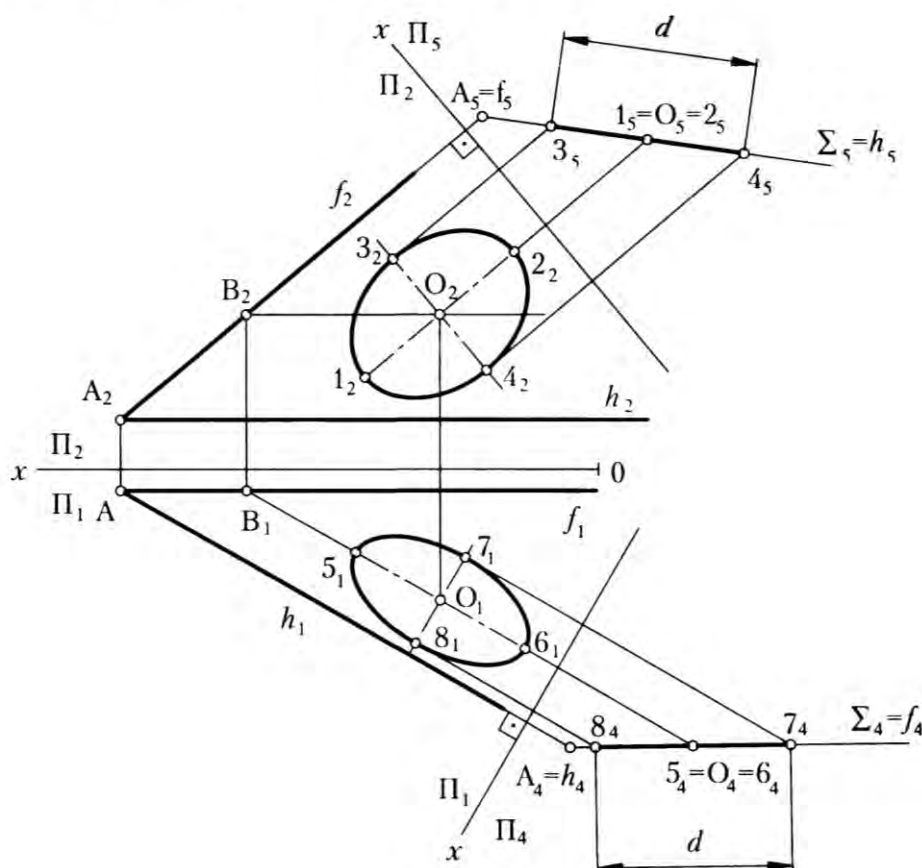


Рис. 3.9

3.2. Поверхні

Будь-який геометричний об'єкт вважають заданим на комплексному рисунку (кресленику), якщо за таким зображенням можна визначити кожна його точку. Для деяких об'єктів достатньо задати на кресленику якісь їх точки. Наприклад, пряму можна задати двома її точками, площину — трьома.

У нарисній геометрії, відповідно до потреб інженерної практики, поверхню задають кінематичним способом як послідовність положень *твірної лінії*, яка рухається у просторі за певним законом. Закон руху твірної можна задати *напрямними елементами*, відносним положенням твірної до напрямних елементів та функцією її змінення в будь-який момент руху. *Сукупність геометричних елементів та умов*, необхідних і достатніх для задання *поверхні*, називається її *визначником*.

Визначник кінематичної поверхні складають:

- твірна;
- напрямні елементи, які задають його геометричну частину;
- умови змінення положення та форми твірної під час руху, які задають його алгоритмічну частину.

Сукупність положень твірної складає лінійчатий каркас поверхні. Така поверхня неперервна.

На рис. 3.10 показано кінематичну поверхню Σ , утворювану рухом кривої другого порядку m вздовж напрямних n, l, i . Напрямна l не входить до складу поверхні.

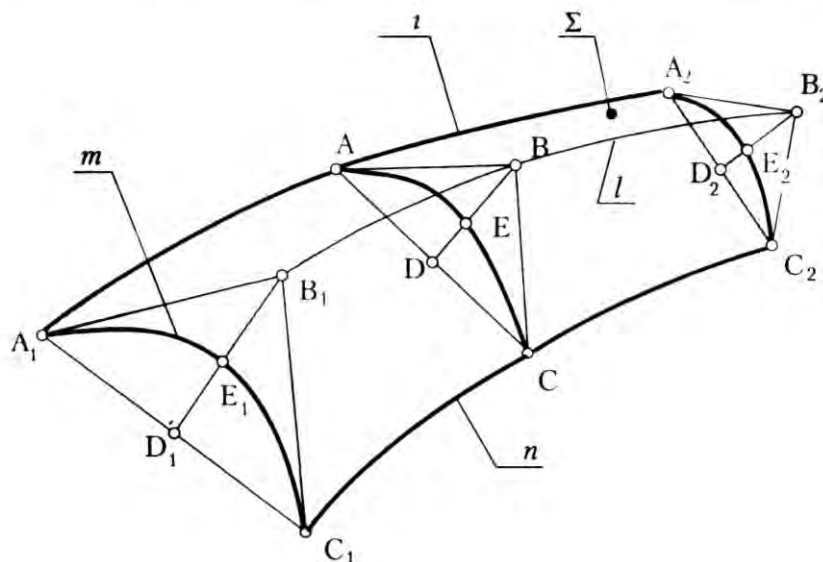


Рис. 3.10

Закон змінення твірної можна задати графіком або функцією $f = f(l)$ змінення її графічного дискримінанта $f = DE/DB$.

Умовний запис визначника складається з геометричної частини $\Sigma(n, l, i)$ й алгоритмічної частини $[m \cap n, m \cap i, f = f(l)]$.

Поверхню можна задати на комплексному рисунку проекціями елементів її визначника.

Якщо розглядати поверхню як сукупність точок, координати яких задовольняють задане рівняння (алгебричне чи трансцендентне), то її можна задати як кресленням, так і рівнянням.

Якщо рівняння поверхні $F(x, y, z) = 0$ є алгебричним степеня n , то поверхню називають алгебричною n -го порядку. Графічно порядок такої поверхні залежить від порядку кривої її перетину з довільною площиною.

Будь-яку поверхню можна задати *каркасом*, тобто сукупністю її ліній. Наприклад, сферу можна задати сукупністю її паралелей та меридіанів. Таке задання може бути *повним*, коли лініями каркаса можна визначити кожну точку поверхні, або *неповним*, якщо точки на поверхні визначаються тільки на заданих лініях каркаса. В останньому випадку поверхню називають *топографічною* (рис. 3.11), і точки на ній поміж лініями каркаса визначаються наближено методом інтерполяції.

У наступних підрозділах розглянемо поверхні деяких видів.

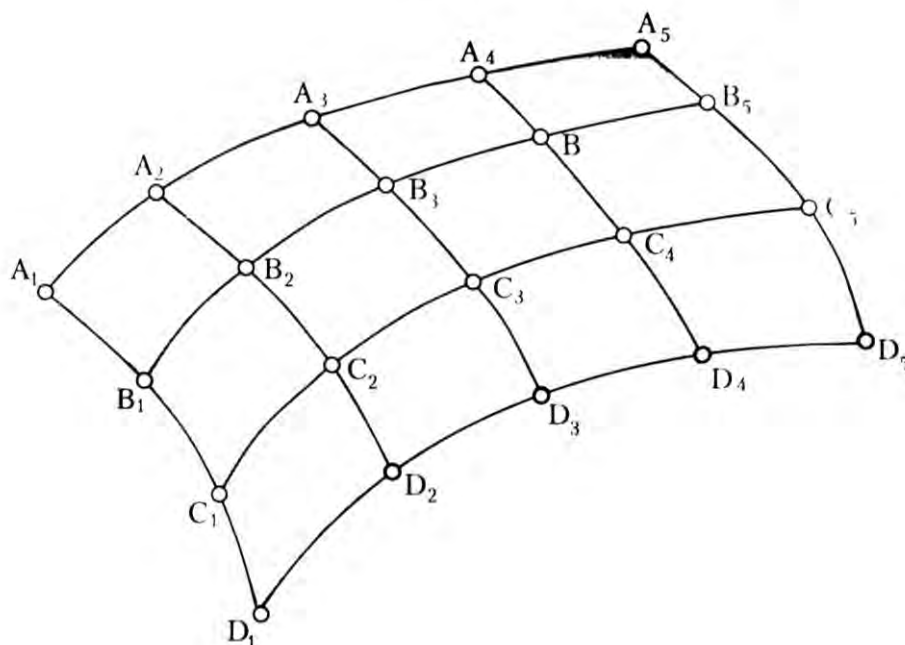


Рис. 3.11

3.2.1. Лінійчаті поверхні

Линійчатою називають поверхню, утворену рухом прямої лінії. Такі поверхні поділяють на *розгортні* та *нерозгортні*. До *розгортних* відносять *поверхні*, які можна розгорнути на площину без розривів і складок. Суміжні твірні таких поверхонь перетинаються чи паралельні. Якщо ці твірні мимобіжні, то поверхня *нерозгортна*.

Розгортні лінійчаті поверхні

- 1 *Циліндрична поверхня* (циліндр) Σ формується рухом прямолінійної твірної l , яка в усіх своїх положеннях паралельна до якоїсь прямої ι та перетинає задану напрямну m — криву лінію (рис. 3.12, а). Визначник такої поверхні має вигляд

$$\Sigma(m, \iota), [l \parallel \iota, l \cap m]$$

Для отримання комплексного рисунка поверхні зображують її напрямні елементи, а кожену точку можна визначити за допомогою алгоритму формування поверхні (рис. 3.12, б).

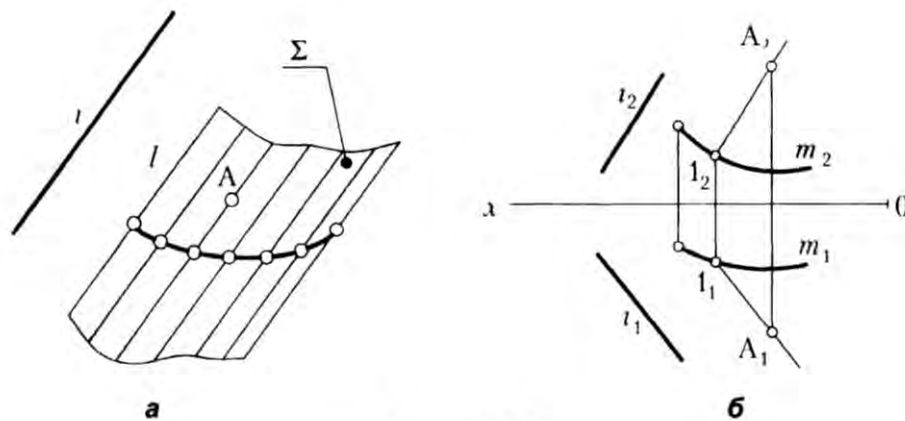


Рис. 3.12

- 2 *Конічна поверхня* (конус) Δ формується рухом прямолінійної твірної l , яка в усіх своїх положеннях перетинає напрямну лінію m та проходить через нерухому точку S (рис. 3.13, а).

Таку поверхню можна задати визначником

$$\Delta(m, S), [l \cap m, l \supset S]$$

На рис. 3.13, б зображено комплексний рисунок конічної поверхні та побудову проєкцій точки, яка належить цій поверхні.

Для більшої наочності креслеників поверхонь можна зображувати їх контурні твірні (рис. 3.14).

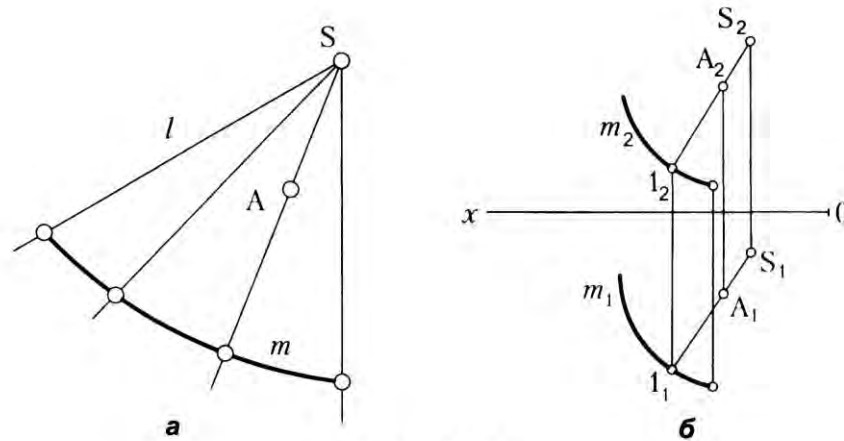


Рис. 3.13

3. *Торсична поверхня* (торс) Θ формується рухом прямолінійної твірної l , яка дотикається в усіх своїх положеннях якоїсь просторової кривої, що зветься *ребром звороту* (рис. 3.15). Визначник торса має вигляд

$$\Theta(m), [l \setminus m].$$

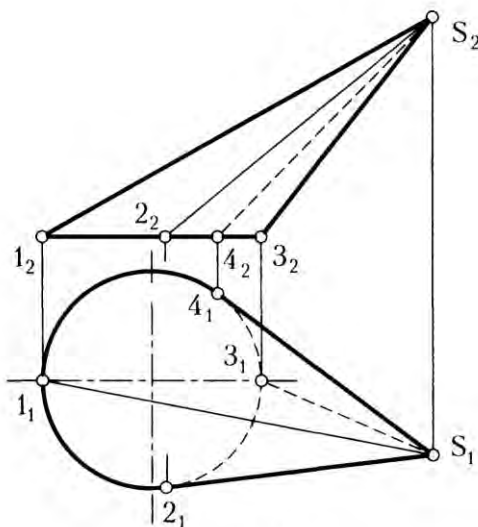


Рис. 3.14

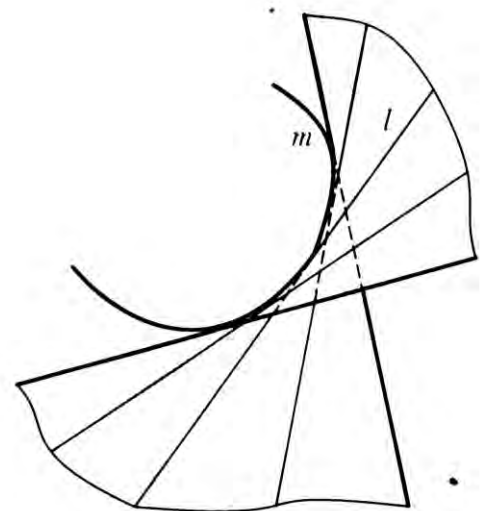


Рис. 3.15

Циліндричні, конічні та торсичні поверхні складають групу лінійчатих розгортних поверхонь. Інші лінійчаті поверхні є нерозгортними та мають назву *скісних*.

Нерозгортні лінійчаті поверхні з площиною паралелізму

Поверхня Σ з *площиною паралелізму* формується рухом прямолінійної твірної l уздовж двох напрямних ліній m та n (рис. 3.16). Твірна l у всіх своїх положеннях паралельна до сталої площини Γ — *площини паралелізму*, або *напрямної площини*.

Визначник такої поверхні має вигляд

$$\Sigma(m, n, \Gamma); [l \cap m, l \cap n, l \parallel \Gamma].$$

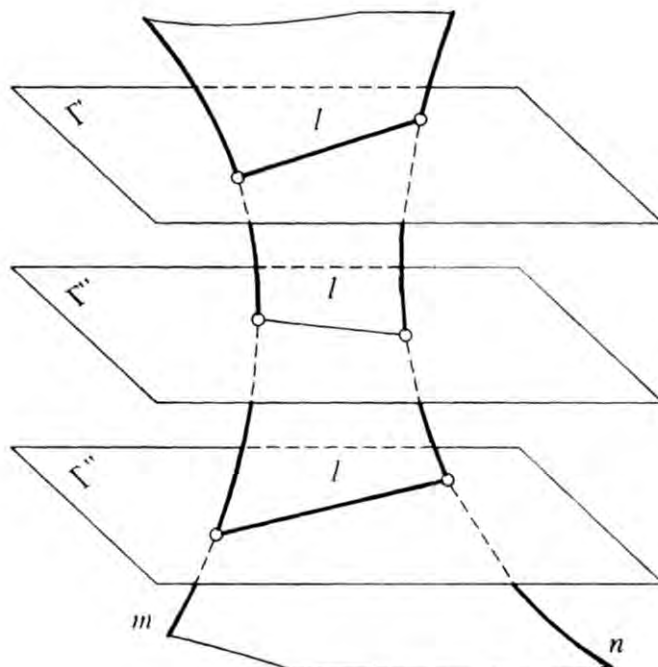


Рис. 3.16

Залежно від форми напрямних m та n виокремлюють поверхні таких видів.

1. Циліндроїд — лінійчата поверхня з площиною паралелізму та двома криволінійними напрямними. На рис. 3.17 зображено комплексний рисунок такої поверхні Σ з площиною паралелізму $\Gamma(\Gamma_2)$ та напрямними кривими m та n .

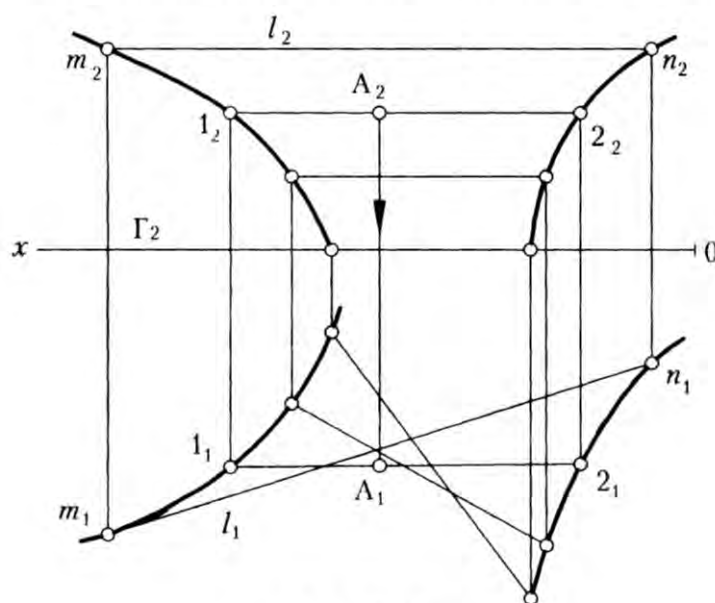


Рис. 3.17

Фронтальні проекції твірних паралельні до сліду Γ_2 площини паралелізму Γ . Горизонтальні проекції твірних будують з умови їх перетину з напрямними m та n .

2. *Коноїд* — лінійчата поверхня з площиною паралелізму, одна з напрямних якої пряма, а друга — крива. Коноїд можна розглядати як окремий випадок циліндроїда.

Коноїд, у якого напрямна пряма перпендикулярна до площини паралелізму, називають прямим.

Коноїд, у якого напрямна крива — гвинтова лінія, називають гелікоїдом.

На рис. 3.18 показано побудову комплексного рисунка коноїда (прямого гелікоїда) Δ з площиною паралелізму Π_1 , напрямними m — прямою лінією та n — гвинтовою лінією. Лінія m перпендикулярна до площини паралелізму Π_1 .

3. *Гіперболічний параболоїд, або «скісна площина»* — лінійчата поверхня з площиною паралелізму, обидві напрямні якої — прямі лінії.

На рис. 3.19 зображено комплексний рисунок гіперболічного параболоїда Θ , заданого площиною паралелізму Π_2 та напрямними мимобіжними прямими m і n . Поверхня формується рухом твірної l уздовж прямих m та n паралельно до площини Π_2 . Така поверхня має ще одну сім'ю твірних q , для яких площиною паралелізму є площина Γ — площина паралелізму напрямних m та n .

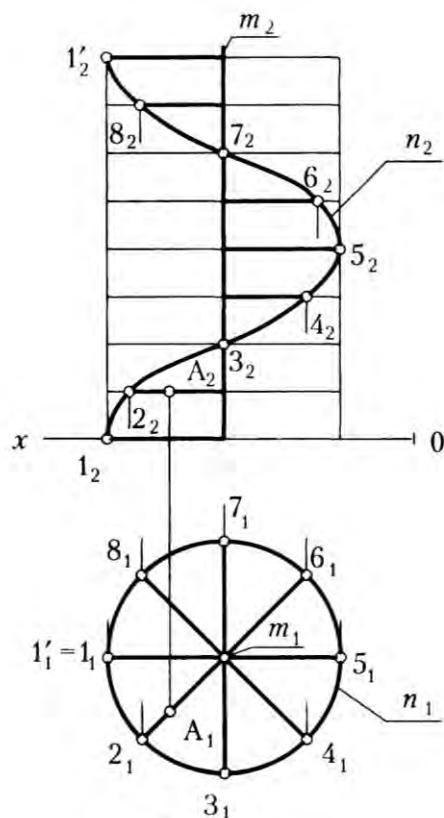


Рис. 3.18

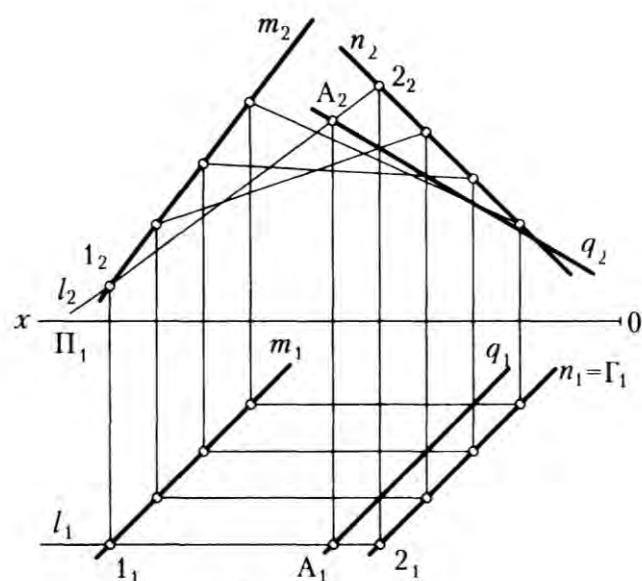


Рис. 3.19

Друга назва поверхні «скісна площина» поширена у техніці, тому що в окремому випадку, коли напрямні m та n перетинаються, твірна l відтворює площину

Поверхня з напрямною поверхнею

Принцип формування поверхні рухом твірної, яка в усіх своїх положеннях паралельна до сталої площини, може бути поширений на побудову поверхні рухом твірної, яка в усіх своїх положеннях паралельна до відповідних твірних напрямної поверхні

Розглянемо утворення *похилого гелікоїда* (рис 3 20)

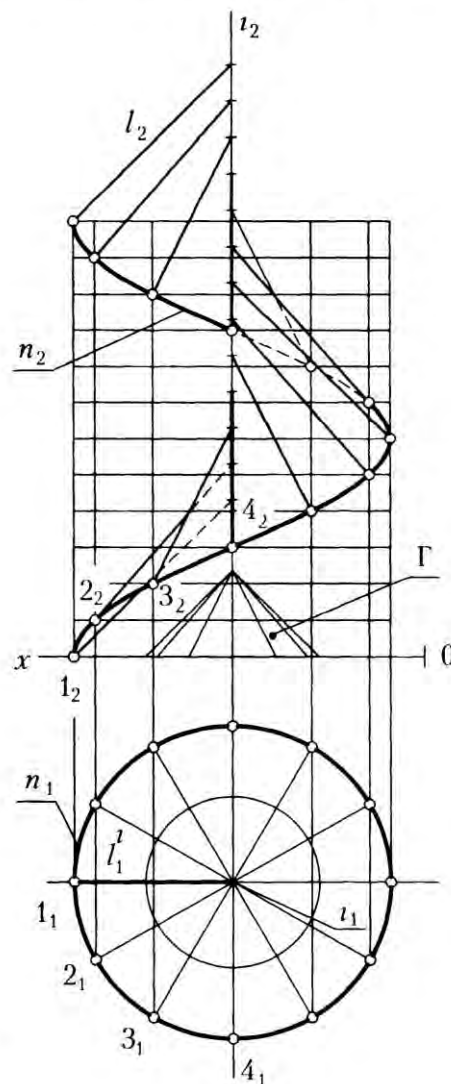


Рис. 3.20

Похилий гелікоїд Σ — лінійчата поверхня, що формується рухом прямолинійної твірної l уздовж двох напрямних — гвинтової лінії n та її осі i . Твірна l у всіх своїх положеннях паралельна до відповідних твірних напрямного конуса Γ . Визначник поверхні складається з гвинтової лінії n , осі i та напрямного конуса Γ .

3.2.2. Поверхні обертання

Поверхнею обертання називають поверхню, утворену обертанням будь-якої лінії навколо нерухомої прямої — осі поверхні. Геометричну частину визначника такої поверхні Σ задано віссю i та твірною $l - \Sigma(i, l)$, а алгоритмічна — алгоритмом обертання $[l \cup i]$.

На поверхні обертання, як правило, визначають дві сім'ї ліній:

- паралелі, що утворюють точки твірної у площинах, перпендикулярних до осі обертання;
- меридіани — лінії, утворені перетином поверхні обертання площинами, що проходять через її вісь.

Паралелі та меридіани перетинаються під прямим кутом та утворюють на поверхні неперервний сітчастий каркас.

Паралель найбільшого радіуса називають *екватором*, найменшого — *горловиною* або *полюсом* поверхні.

Площину, що проходить через вісь обертання та утворює меридіан, називають *меридіанною*. Поверхня обертання симетрична відносно будь-якої меридіанної площини.

Поверхню обертання називають *закритою*, якщо меридіан є замкненою кривою, що перетинає вісь обертання у двох точках.

Меридіан поверхні обертання — найкоротша лінія на поверхні. Він належить до так званих *геодезичних* ліній поверхні, що є аналогами прямих ліній на площині. Якщо вісь поверхні обертання паралельна до фронтальної площини проєкцій, то меридіан у фронтальній площині називають *головним*.

На рис. 3.21 зображено комплексний рисунок поверхні обертання, головним меридіаном якої є твірна l , горловиною — паралель m . За допомогою паралелі a на поверхні визначено точку A .

Поверхні, які найчастіше використовують у техніці, наведено в табл. 3.1.

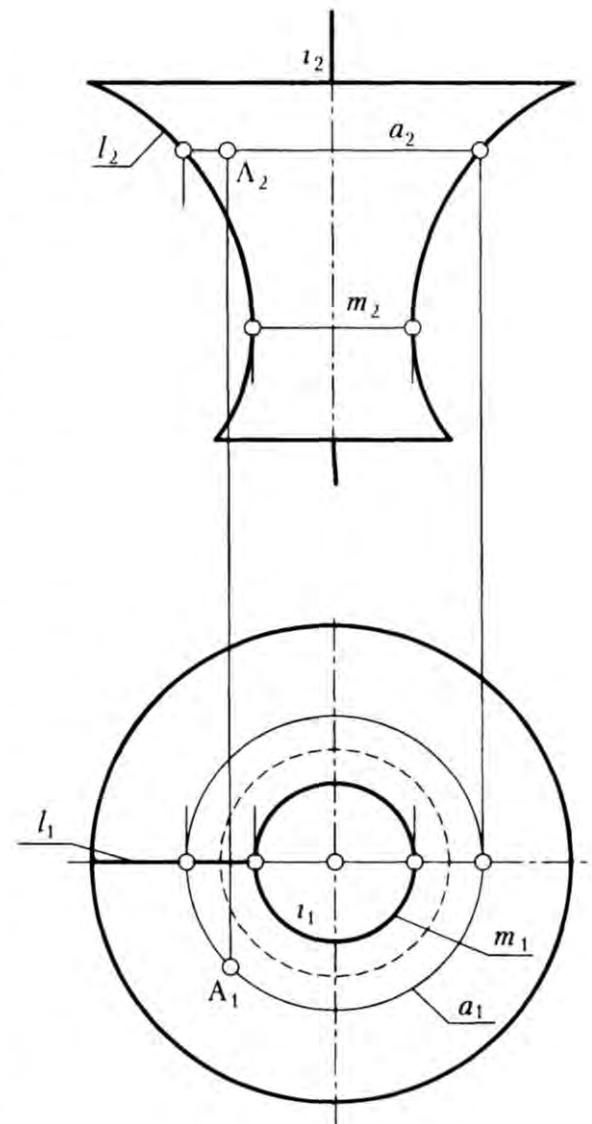
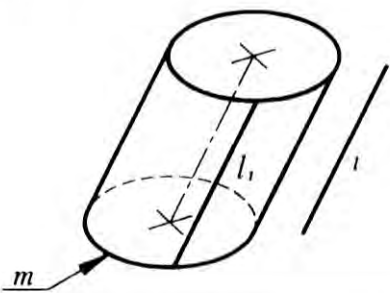
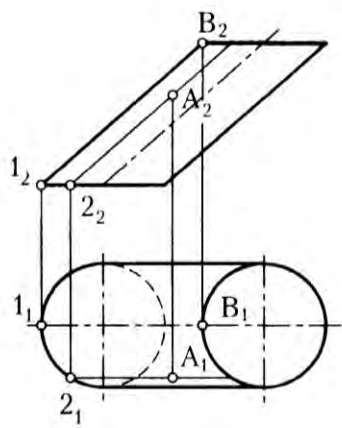
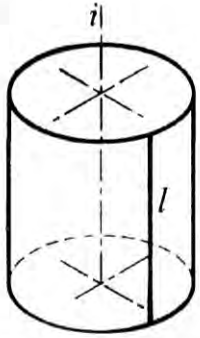
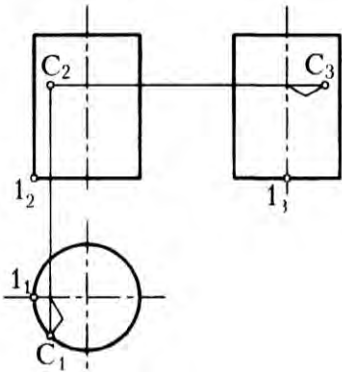
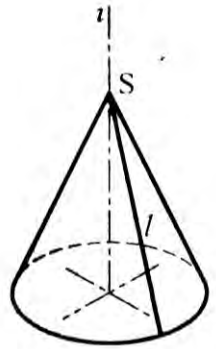
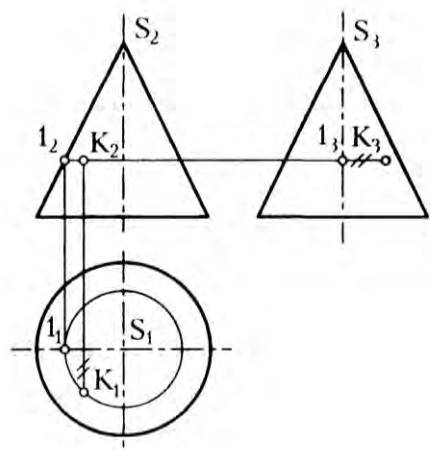
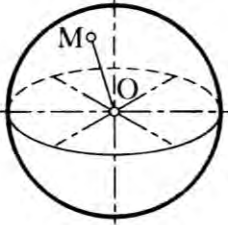
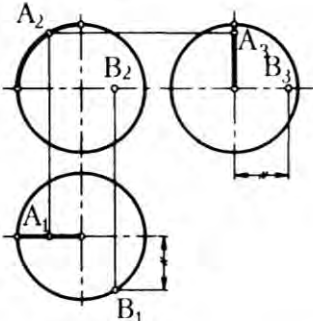
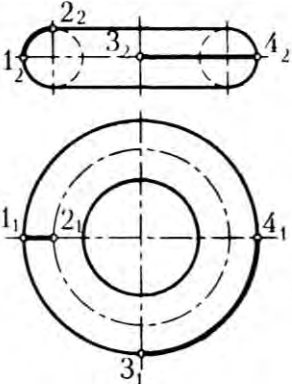
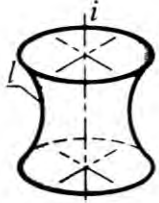
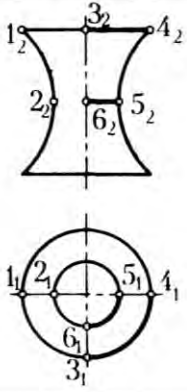
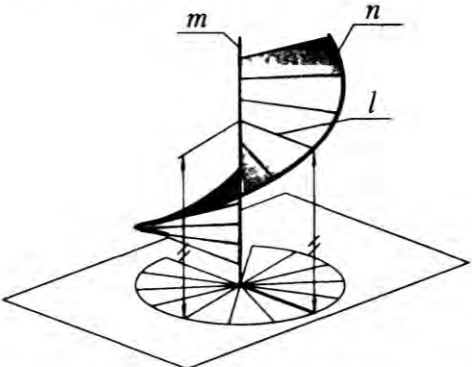
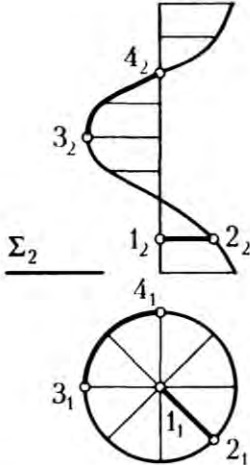


Рис. 3.21

Таблиця 3.1. Поверхні, що їх найчастіше використовують у техніці

Назва та наочне зображення. Визначник поверхні	Зображення обрису поверхні. Побудова точок на поверхні
Еліптичний циліндр (нормальний переріз – еліпс) $\Theta(m, i)$ $[l \cap m, l \parallel i]$ 	
Циліндр обертання $\Sigma(l, i); [l \cup i, l \parallel i]$, i – вісь обертання 	
Конус обертання $\Delta(l, i), [l \cup i, l \cap i]$, i – вісь обертання 	

Назва та наочне зображення. Визначник поверхні	Зображення обрису поверхні. Побудова точок на поверхні
Сфера $\Theta(M, O, R); OM = R$ 	
Тор $\Delta(l, i), [l \cup i]$, i — вісь обертання, l — коло 	
Гіперboloїд однопорожнинний $\Sigma(l, i); [l \cup i]$, i — вісь обертання, l — гіпербола 	
Конoїд $\Theta(l, m, n, \Sigma); [l \cap m, l \cap n, l \parallel \Sigma]$ 	

3.3. Розгортки поверхонь

У ході виготовлення виробів з листового матеріалу необхідною технологічною операцією є розгортка поверхні виробу.

Розгорткою поверхні називають плоску фігуру, яку отримують після суміщення поверхні з площиною.

Сумістити з площиною без розривів і складок можна тільки розгортні поверхні: циліндр, конус, торс. Нерозгортні поверхні можна розгорнути на площину лише наближено, тобто одержати наближену «викрійку» такої поверхні.

Розгортка поверхні має такі основні властивості.

- Кожній точці розгортки відповідає єдина точка поверхні.
- Довжина дуги будь-якої лінії на розгортці дорівнює довжині дуги відповідної лінії на поверхні.
- Прямій лінії на розгортці відповідає на поверхні або пряма, або геодезична лінія. Геодезичною лінією на поверхні називають найкоротшу лінію між двома точками на поверхні. Наприклад, на циліндрі геодезичною є гвинтова лінія.
- Кут між двома лініями на розгортці дорівнює куту між відповідними лініями на поверхні. Паралельним прямим відповідають паралельні прямі.
- Площа, яка обмежена замкненою лінією на розгортці, дорівнює площі, що обмежена відповідною лінією на поверхні.

3.3.1. Розгортки багатогранників

Розгортка багатогранника являє собою сукупність багатокутників — граней багатогранника, для яких зазначено порядок їх з'єднання (склеювання) по сторонах та вершинах для того, щоб отримати даний багатогранник.

На рис. 3.22 показано побудову *розгортки піраміди*. Розгортка складається із сукупності граней у натуральну величину — трикутників. Натуральна величина кожної грані визначена за її трьома сторонами. Натуральні величини ребер піраміди знайдено способом плоскопаралельного переміщення.

На рис. 3.23 показано побудову розгортки прямої призми. Розгорткою її бічної поверхні є прямокутник, одна зі сторін якого дорівнює периметру основи призми, а друга — висоті призми. Показано також побудову на розгортці лінії перерізу 1', 2', 3' призми площиною.

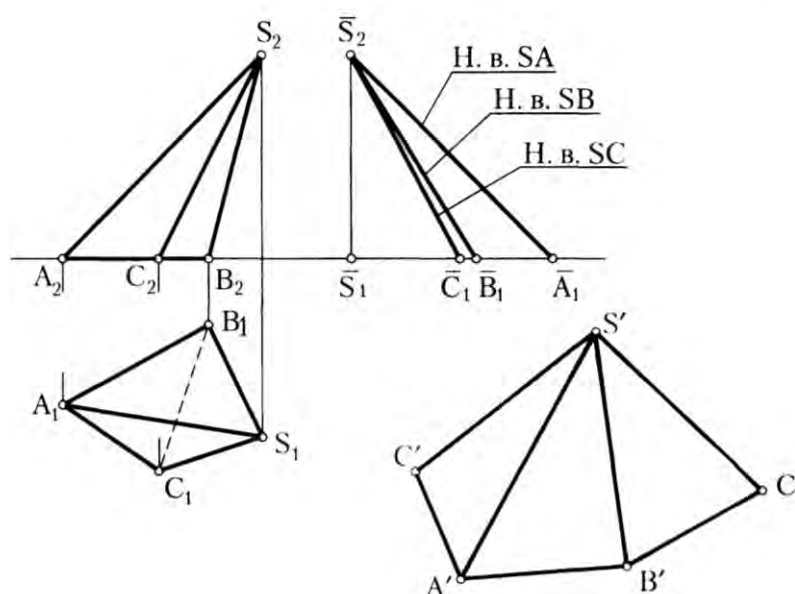


Рис. 3.22

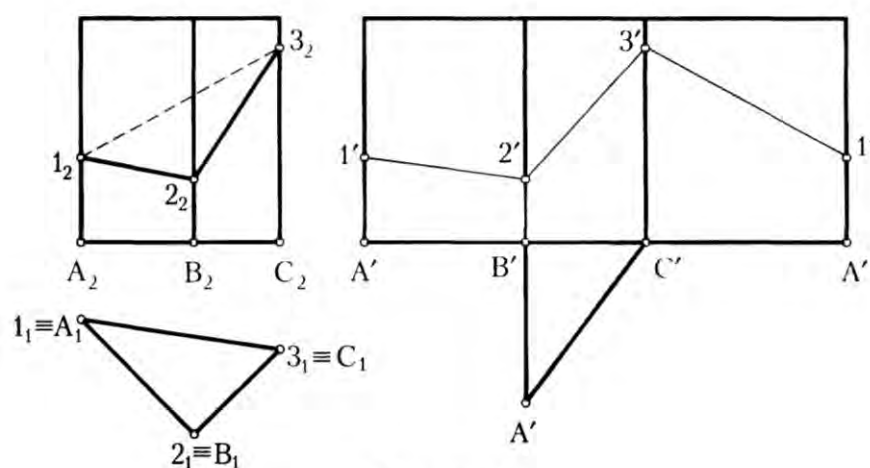


Рис. 3.23

На рис. 3.24 показано побудову розгортки бічної поверхні похилої призми способом нормального перерізу.

Перетинаємо призму площиною $\Sigma(\Sigma_2)$ перпендикулярно до її ребер. Знаходимо натуральну величину отриманого перерізу 1–2–3 та розгортаємо його периметр у пряму 1'–2'–3'–1'. У точках 1', 2', 3', 1' проводимо нормалі до прямої та відкладаємо на них відрізки, що дорівнюють натуральній величині відрізків відповідних ребер: $A1' = A_21_2$, $B2' = B_22_2$, $C3' = C_23_2$.

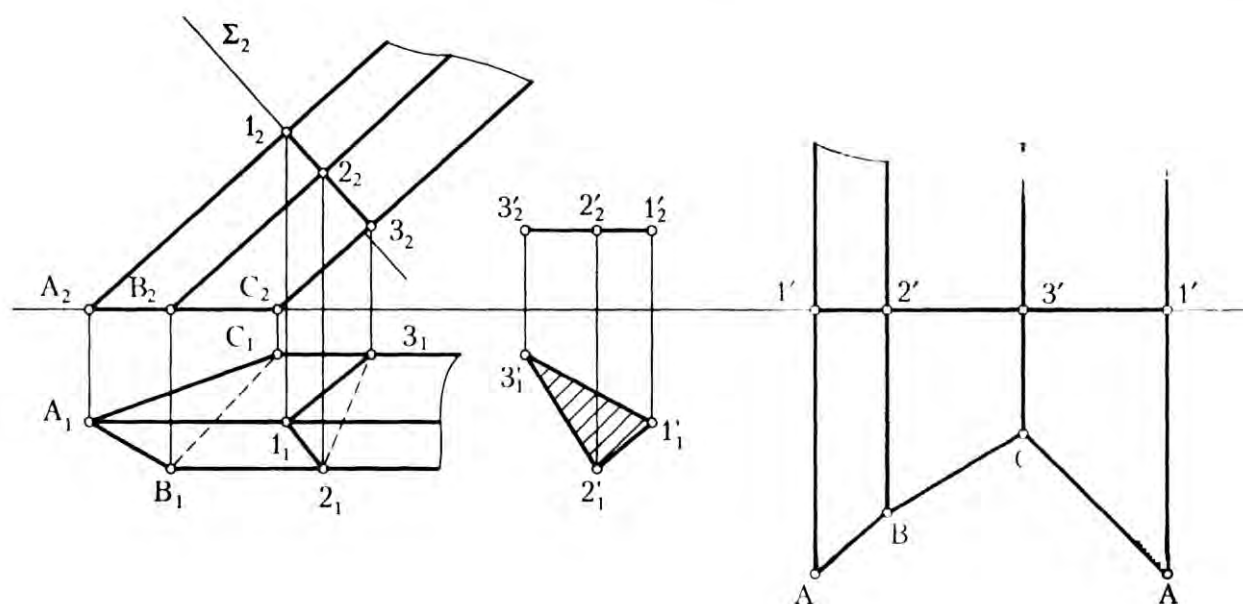


Рис. 3.24

Якщо ребра призми — прямі загального положення, то треба спочатку знайти їх натуральну величину.

На рис. 3.25 показано побудову розгортки похилої призми способом послідовного розгортання її граней.

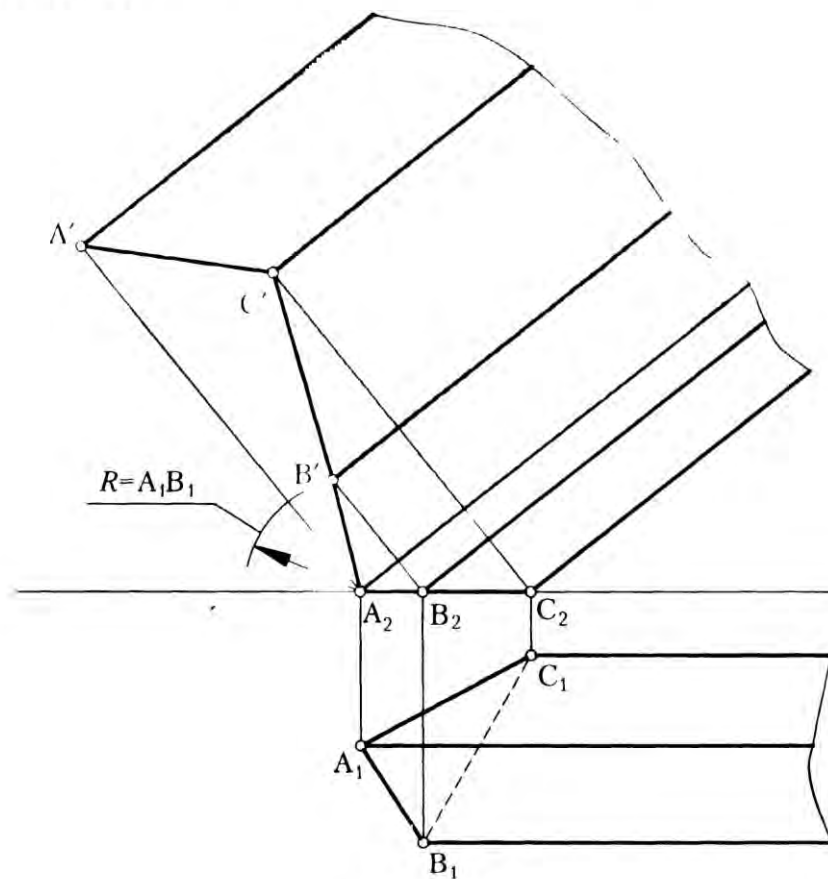


Рис. 3.25

Натуральні величини граней залежать від способу обертання навколо лінії рівня. Тому призму розташовуємо таким чином, щоб її ребра були паралельні до площини Π_2 , а основа — паралельна до Π_1 . Обертаючи грані призми навколо ребер, послідовно будуємо за відповідними сторонами грані призми у натуральну величину. Сукупність граней являє собою розгортку бічної поверхні призми.

3.3.2. Розгортки кривих поверхонь

Розгортки розгортних поверхонь

Розгортка відсіку *циліндра обертання* визначається периметром його основи та висотою відсіку циліндра (рис. 3.26).

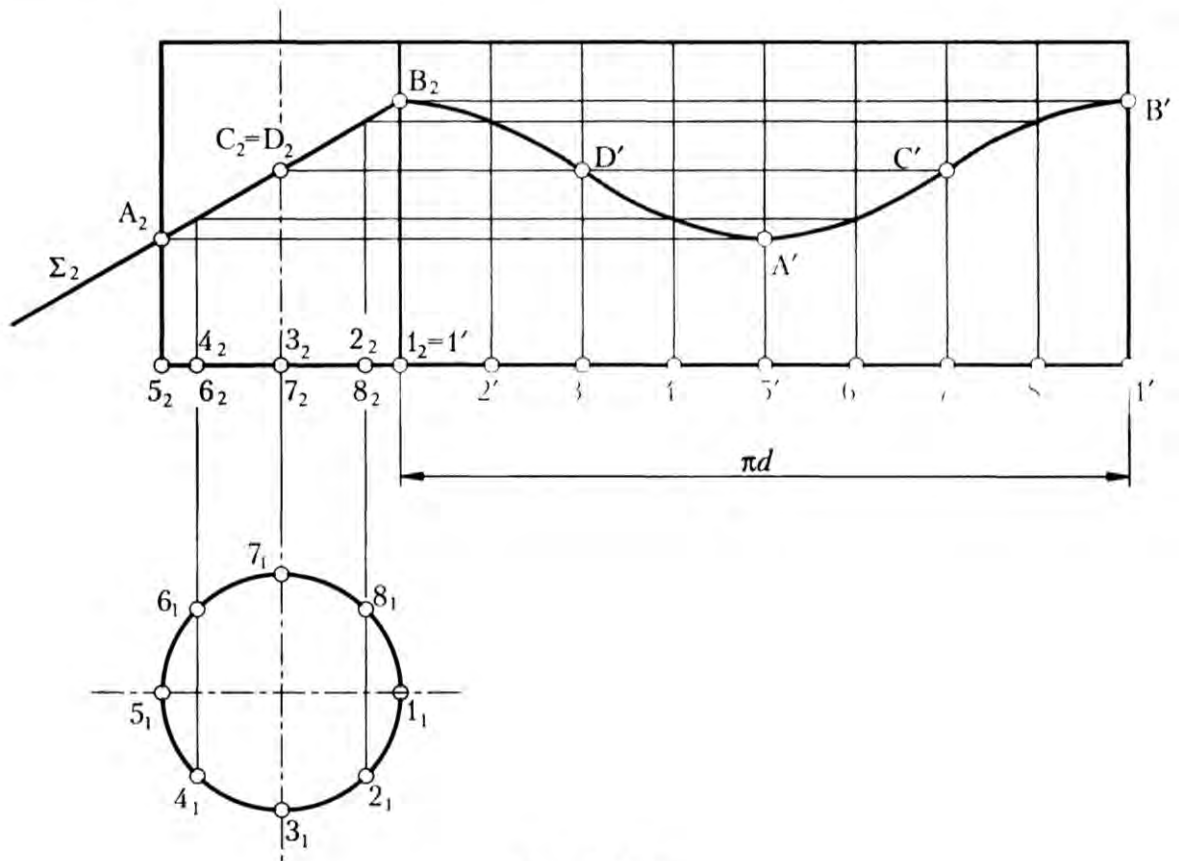


Рис. 3.26

Розгорткою поверхні відсіку *конуса обертання* є сектор, кут якого α дорівнює

$$\frac{R}{l} \times 360^\circ,$$

де R — радіус основи, а l — твірна відсіку конуса (рис. 3.27).

Лінію будь-якого перерізу поверхні можна побудувати на їх розгортках за допомогою твірних (див. рис. 3.26, 3.27).

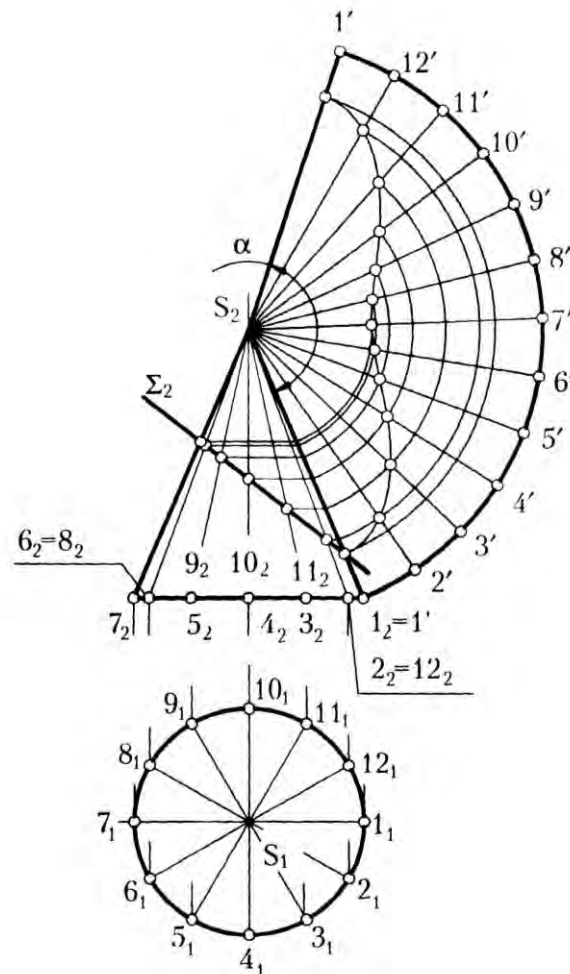


Рис. 3.27

Для всіх інших кривих розіртних поверхонь, як правило, будують наближені розгортки за допомогою вписаних у поверхню чи описаних навколо них багатограних поверхонь.

Основи відсіків кривих поверхонь замінюють вписаними чи описаними багатокутниками, з вершин яких будують твірні поверхонь, що розгортаються. Розгортку вписаного чи описаного багатогранника вважають наближеною розгорткою кривої поверхні.

Як приклад на рис. 3.28 наведено побудову розгортки поверхні похилого еліптичного циліндра за допомогою вписаної в нього призматичної поверхні. Методику побудови розгортки такої призматичної поверхні розглянуто в підрозділі 3.3.1 (див. рис. 3.25). Розгортка циліндра являє собою сукупність граней призми. Очевидно, що точність такої розгортки збільшується зі зростанням кількості граней призми.

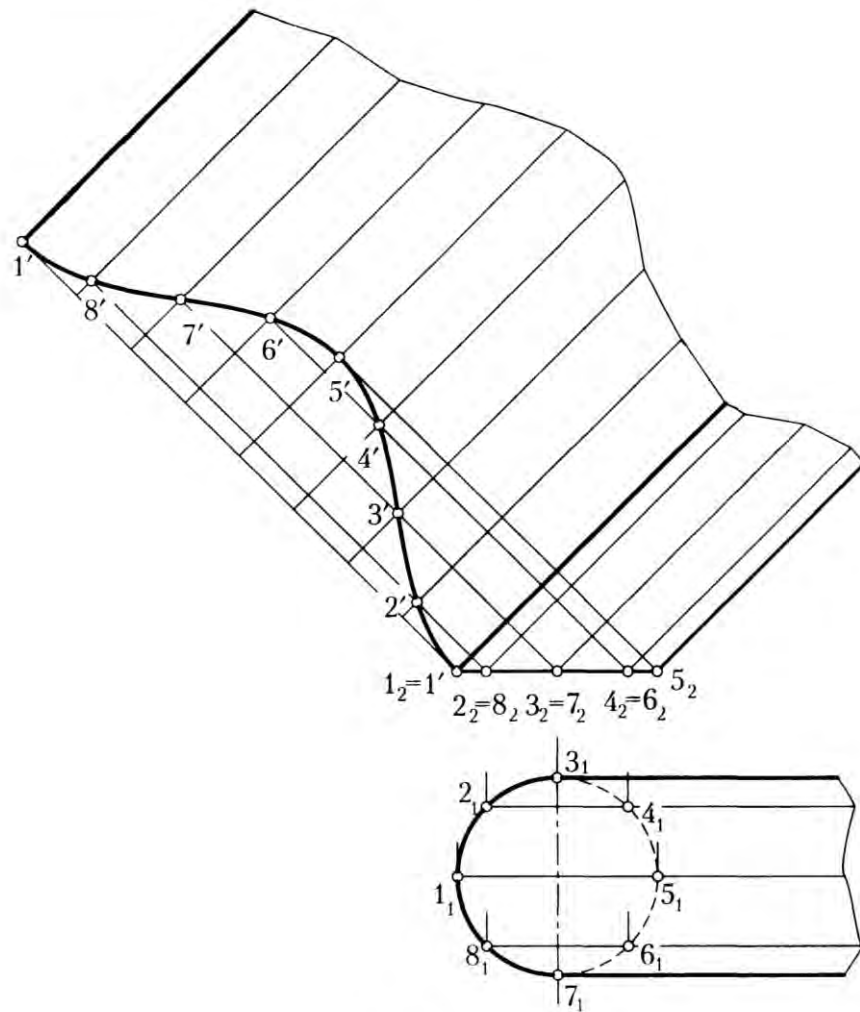


Рис. 3.28

Умовні розгортки нерозгортних поверхонь («викрійки»)

Умовні розгортки нерозгортних поверхонь будують як сукупність розгорток частин розгортних поверхонь, якими апроксимують нерозгортну поверхню.

Розглянемо приклад побудови умовної розгортки сферичної поверхні, апроксимуючи її частинами циліндричних поверхонь.

Розіб'ємо поверхню сфери на рівні частини за допомогою горизонтально-проекціювальних площин $\Sigma, \Sigma', \dots$ (рис. 3.29, а).

Апроксимуємо кожну таку частину прямим круговим циліндром. Такий циліндр між площинами Σ та Σ' можна задати напрямною I, II, III, IV — меридіанним перетином сфери — та твірними $11', 22', 33'$ — дотичними до паралелей сфери в точках I, II, III (рис. 3.29, б).

Будуємо розгортку такої циліндричної поверхні (рис. 3,29, в). Приєднуючи до цієї розгортки умовні розгортки частин сфери, що залишаються, отримуємо умовну розгортку («викрійку») поверхні сфери.

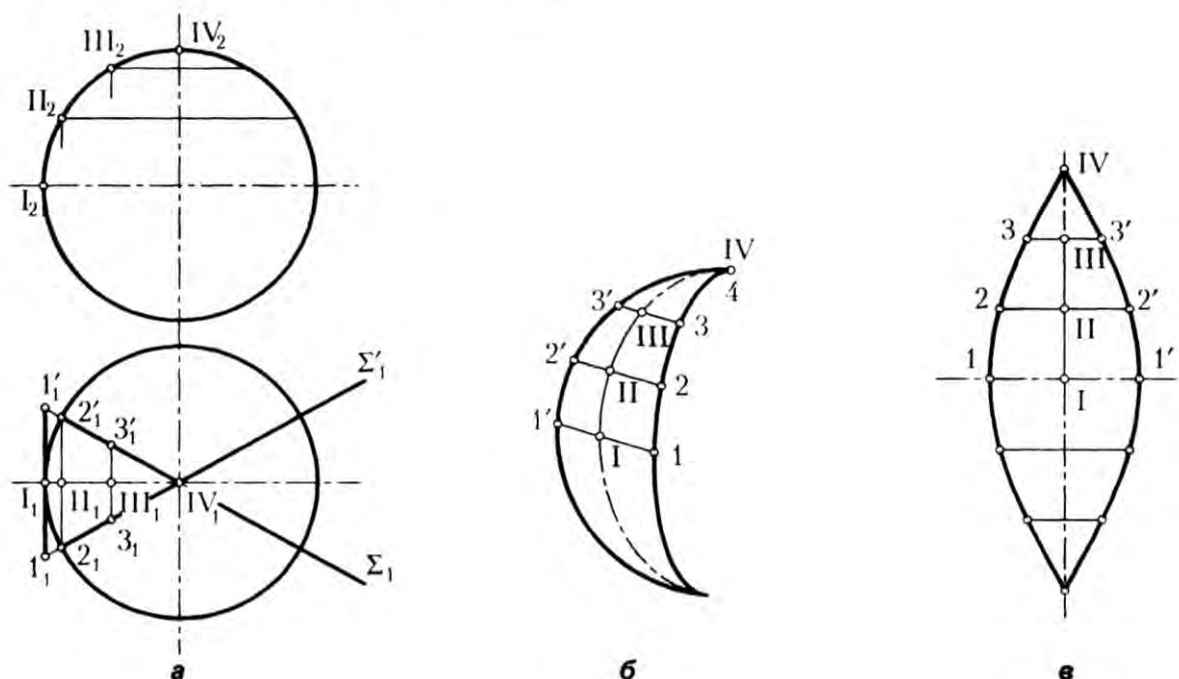


Рис. 3.29

Як апроксимувальну поверхню часто використовують багатогранник, гранями якого є трикутники. Такий метод називається *триангуляцією*.

На рис. 3.30, а зображено коноїд $\Theta(a, k, \Sigma)$. Напрямними коноїда є пряма $a(a_1, a_2)$ та коло $k(k_1, k_2)$, площиною паралелізму $\Sigma(\Sigma_1)$ — фронтальна площина. Поверхню замінюють багатогранником із трикутними гранями 7–8–6, 6–7–5, Плоскопаралельним переміщенням визначають сторони трикутників 6–7, 4–5,

Побудову умовної розгортки (рис. 3.30, б) починаємо з прямої a , яка проєкціюється на площину Π_1 у натуральну величину та заміщається на розгортці відрізком прямої у натуральну величину.

Будуємо вісь симетрії 9–8 і трикутники 6–7–8, 7–9–10 і т. д. Трикутники послідовно з'єднуємо.

На рис. 3.30 побудовано половину умовної розгортки.

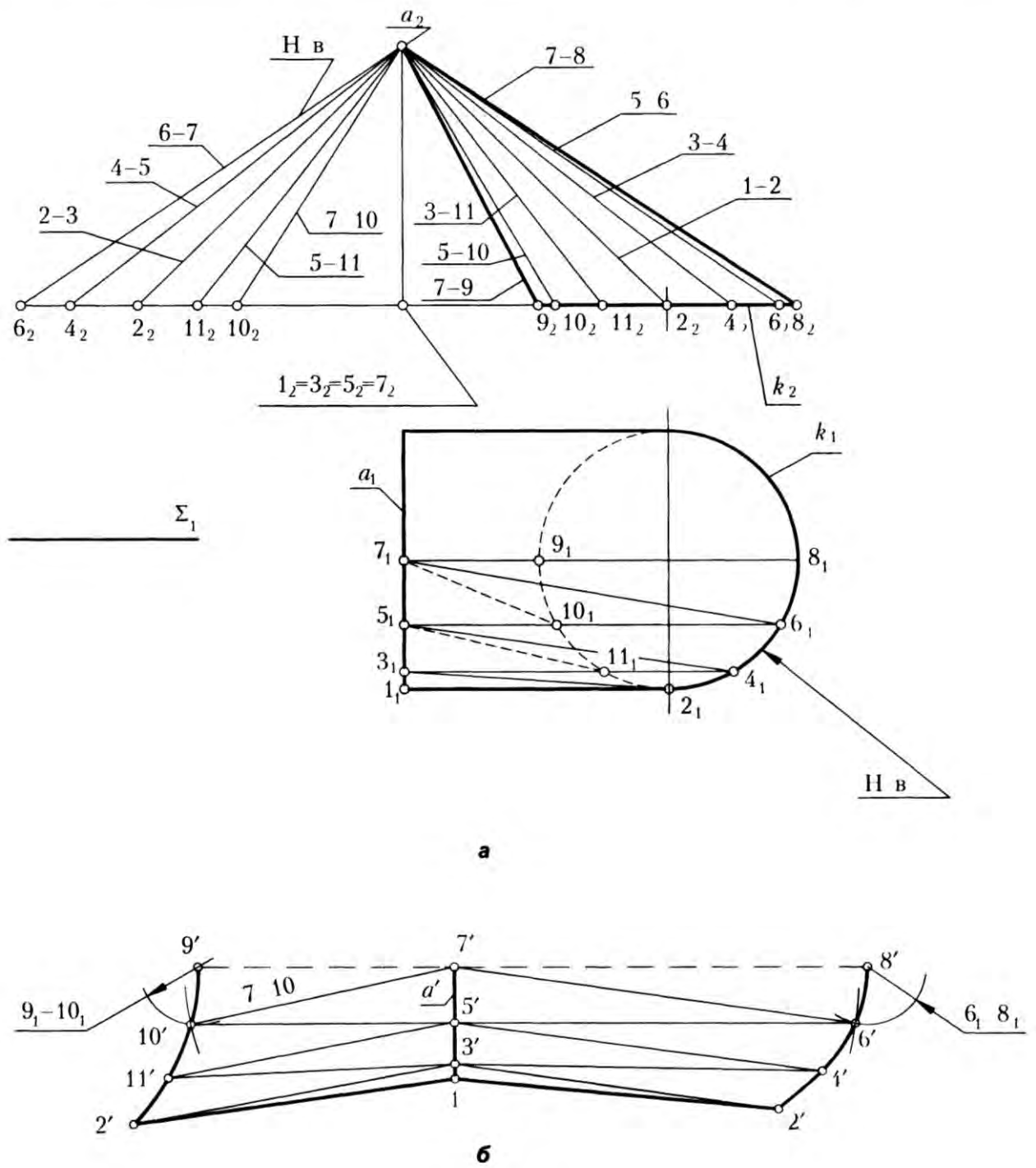


Рис. 3.30

Запитання для самоперевірки

1. Як задати криву на комплексному рисунку ?
2. Що таке інтерполяція функцій? Апроксимація кривих ?
3. Побудуйте коло заданого радіуса в проєкціювальній площині, у площині рівня.
4. Які існують способи задання поверхні?
5. Як задають визначник поверхні? Із чого він складається?
6. Яку поверхню вважають розгортною?
7. Які поверхні називають лінійчатими?
8. Наведіть приклади лінійчатих розгортних і нерозгортних поверхонь.
9. Як утворюються поверхні обертання? Наведіть приклад визначника такої поверхні.
10. Якими властивостями характеризуються розгортки поверхонь?
11. Які бувають розгортки?
12. Як побудувати розгортки прямої призми та циліндра? Похилої призми та циліндра? Прямого та похилого конуса? Умовні розгортки кривих поверхонь?

Розділ 4

Алгоритми розв'язання задач перетину поверхонь площинами, прямими та між собою

- ♦ Перетин поверхні з площиною
- ♦ Перетин прямої та поверхні
- ♦ Взаємний перетин поверхонь

4.1. Перетин поверхні з площиною

Перетин поверхні з площиною являє собою лінію, форма якої залежить від форми поверхні та взаємного розташування площини та поверхні (рис. 4.1). Така лінія має назву *перерізу*. Переріз визначається множиною точок перетину ліній поверхні та заданої січної площини.

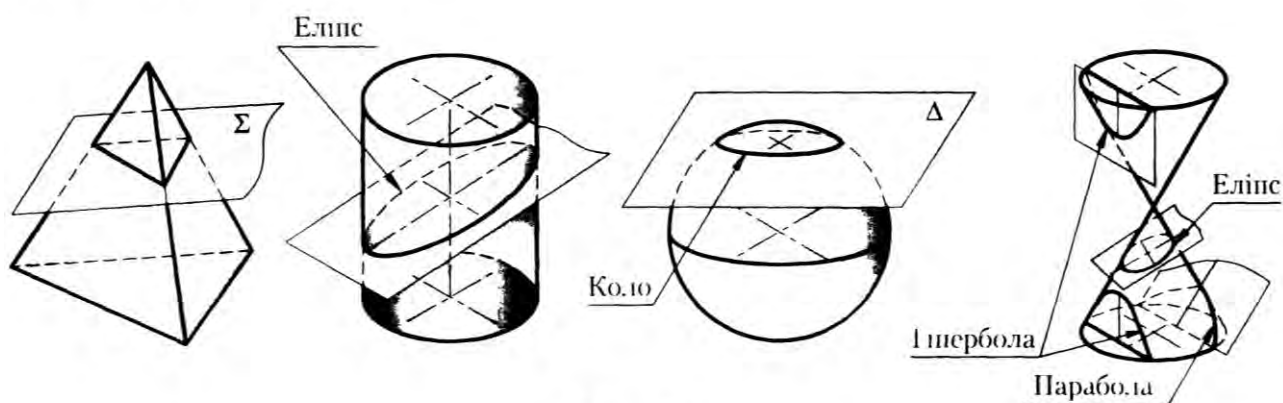


Рис. 4.1

Багатогранники перетинаються площиною по багатокутнику, вершини якого – точки перетину ребер багатокутника із січною площиною.

Криві поверхні в загальному випадку перетинаються площинами по кривих лініях. Так, перерізами поверхонь другого порядку є криві другого порядку або образи їх виродження.

На комплексному рисунку знаходження точки перетину будь-якої лінії з площиною спрощується, якщо задано площину окремого положення. Якщо задано площину загального положення, то її можна перетворити на проєкціювальну за допомогою перетворення проєкцій.

Розглянемо алгоритм розв'язання задачі побудови перерізу у випадку, коли січна площина проєкціювальна.

1. Визначити форму лінії перерізу поверхні площиною в просторі.
2. Визначити форму проєкцій лінії перерізу.
3. Визначити проєкції характерних точок шуканої лінії:
 - точок, що проєкціюються на обриси проєкцій поверхні (точок видимості);
 - точок, за якими можна графічно побудувати всю лінію: для багатокутника — вершини, для еліпса — кінці спряжених діаметрів, для параболи та гіперболи — вершини й кінці найбільшої хорди.
4. Побудувати, якщо треба, проміжні точки та з'єднати всі точки з урахуванням видимості.

Проміжні точки можна будувати проєкціюванням або графічним способом за характерними точками.

На рис. 4.2 наведено приклад розв'язання задачі побудови лінії перерізу поверхні сфери січною площиною $\Sigma(\Sigma_2)$.

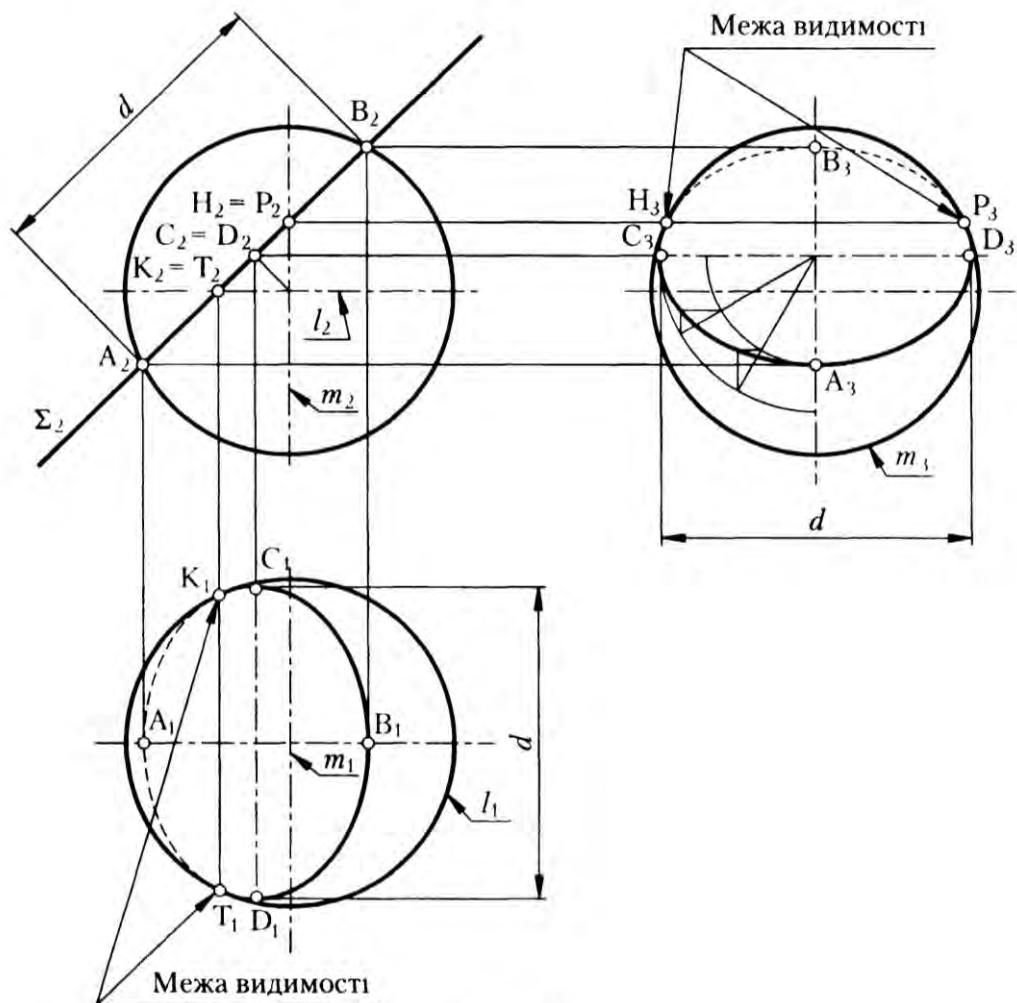


Рис. 4.2

Лінією перерізу є коло діаметром d . проекції перерізу: фронтальна — відрізок прямої A_2B_2 , що збігається зі слідом-проекцією Θ_2 , горизонтальна та профільна — еліпси, великі осі яких дорівнюють діаметру d .

Видимість на горизонтальній проекції залежить від точок K та T , які належать екватору l , на профільній — H та P , що належать меридіану m , паралельному до Π_3 . На рис. 4.3 показано побудову лінії перерізу конуса площиною $\Theta(\Theta_2)$, яка перетинає всі твірні конуса. Лінія перерізу являє собою еліпс з осями AB та CD . Фронтальна проекція еліпса — відрізок прямої A_2B_2 , що збігається зі слідом-проекцією Θ_2 площини Θ , а горизонтальна та фронтальна — еліпси.

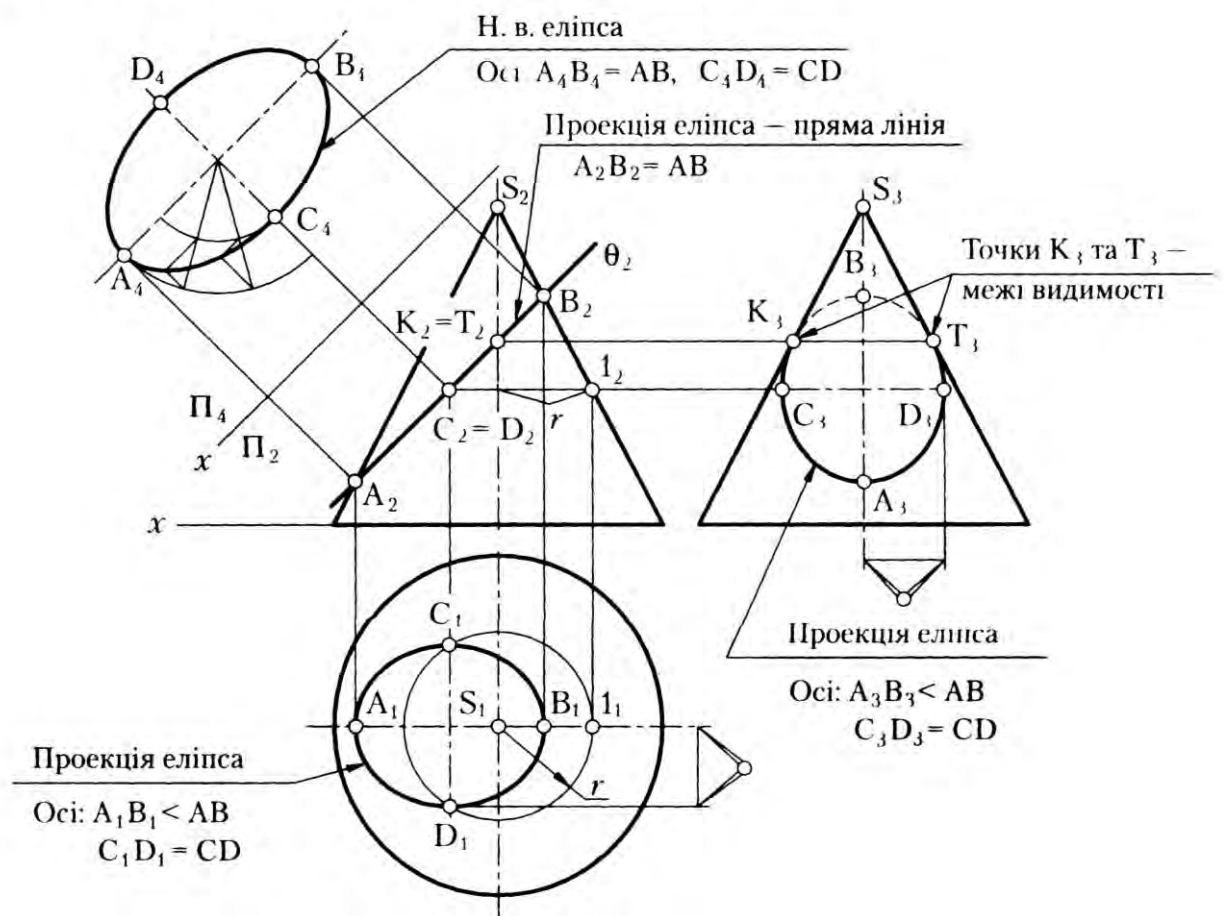


Рис. 4.3

Переріз у натуральну величину побудовано заміненням площин проекцій. Лінію перерізу будь-якої поверхні площиною загального положення можна побудувати за допомогою перетворення площини загального положення на проєкціювальну.

Проекція шуканої лінії перерізу в новому положенні збігається зі слідом-проекцією площини. Задачу знаходження лінії перерізу розв'язують так само, як у вже розглянутих випадках. Розв'язок проєктується у попередню систему площин проекцій.

На рис. 4.4 наведено розв'язок задачі перетину поверхні сфери з площиною загального положення $\Sigma(h^0 \cap f^0)$.

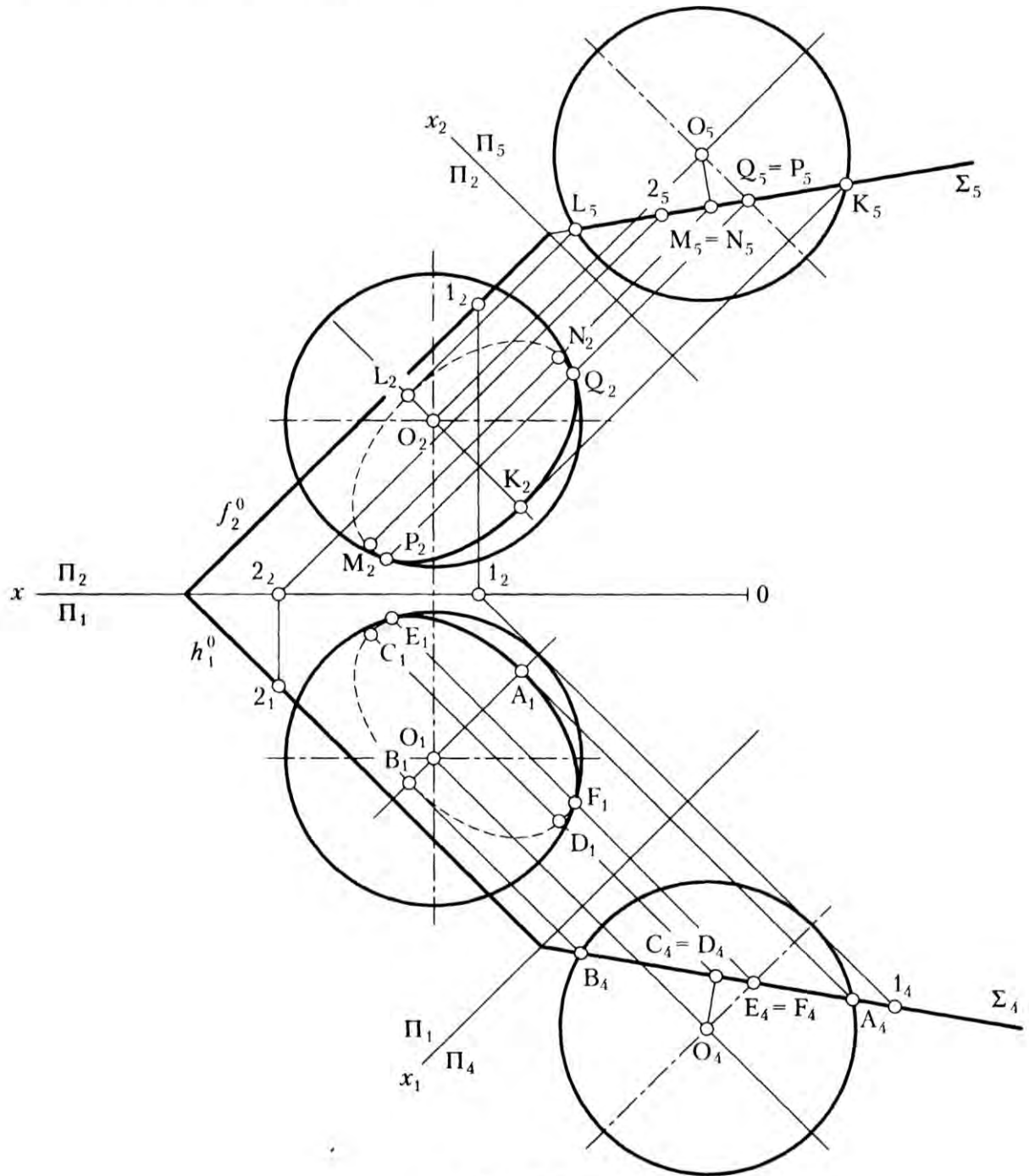


Рис. 4.4

Лінією перерізу поверхні є коло, яке проєкціюється еліпсами на площини проєкцій Π_1 та Π_2 . Великі осі еліпсів дорівнюють діаметру кола, а розмір малої осі залежить від кута нахилу α площини Σ до площини Π_1 для горизонтальної проєкції та кута нахилу β площини Σ до площини Π_2 — для фронтальної.

Проекції лінії перерізу будують заміненням площини проекції Π_2 на Π_4 для горизонтальної проекції та Π_1 на Π_5 — для фронтальної.

Межі видимості зображень на площинах проекцій Π_1 та Π_2 визначають за допомогою проекцій F_4, E_4, P_5, Q_5 точок перетину лінії перерізу з проекціями обрисів зображень поверхні на додаткові площини проекцій Π_4 та Π_5 .

Для площини загального положення як площини перерізу поверхні перетворення проекцій можна не застосовувати, якщо задана поверхня є проекціювальною відносно площини проекцій. У цьому разі відповідна проекція лінії перерізу збігається зі слідом-проекцією поверхні. Проекції лінії перерізу, яких немає, можна побудувати за точками, використовуючи умову належності цієї лінії до січної площини.

На рис. 4.5 показано побудову лінії перерізу прямої призми січною площиною Σ . Грані призми є проекціювальними площинами відносно горизонтальної площини проекцій Π_1 . Горизонтальна проекція $A_1B_1C_1$ шуканої лінії перерізу збігається з горизонтальною проекцією призми, а фронтальну знайдено з умови належності точок A, B, C до січної площини Σ за допомогою фронтальї площини.

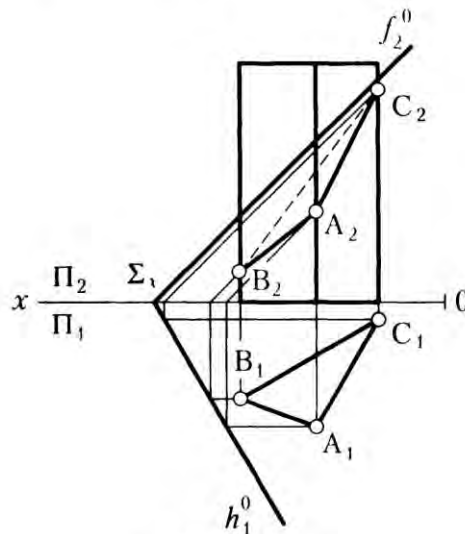


Рис. 4.5

На рис. 4.6 показано побудову лінії перерізу прямого циліндра січною площиною загального положення Σ . Лінія перерізу являє собою еліпс. Твірні циліндра є проекціювальними відносно площини проекцій Π_1 . Отже, горизонтальна проекція еліпса збігається з колом — проекцією циліндра на горизонтальну площину, а фронтальну проекцію — еліпс — побудовано за точками. Характерні точки 1, 2 та 3, 4 визначають спряжені осі еліпса, а 5, 6 — межі видимості. Будь-які допоміжні точки можна побудувати з умови їх належності площині Σ чи графічним способом побудови точок еліпса за спряженими осями.

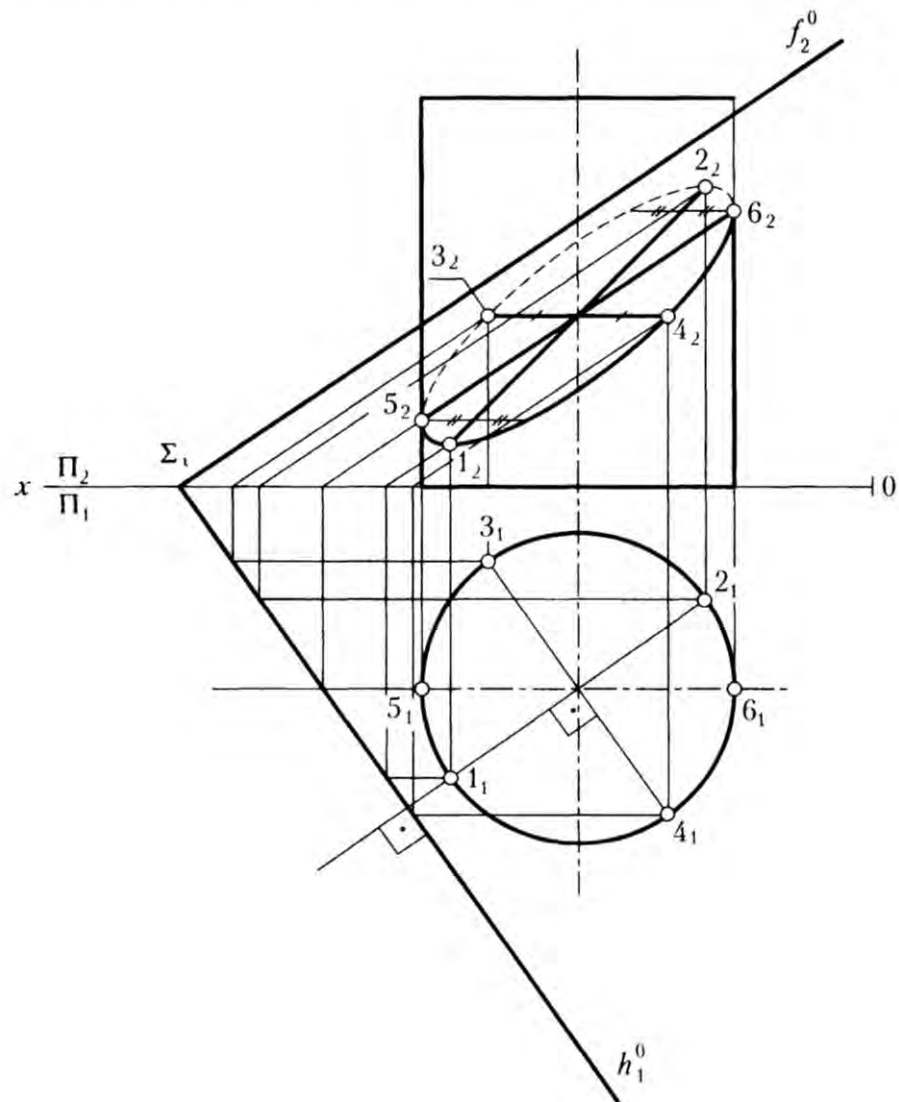


Рис. 4.6

4.2. Перетин прямої та поверхні

Точки перетину прямої a з поверхнею Σ , як і точку перетину прямої a та площини Σ , визначають за допомогою однакового алгоритму.

1. Через пряму проводять допоміжну площину Γ : $a \subset \Gamma$.
2. Знаходять лінію перетину m допоміжної площини Γ і заданої поверхні (площини) Σ : $\Gamma \cap \Sigma = m$.
3. Знаходять точки (точку) перетину лінії m із заданою прямою: $m \cap a = M, N$.
4. Визначають видимість відрізків прямої.

Якщо для побудови точки перетину прямої з площиною допоміжну площину, як правило, вибирають проєкціювальною, то для знаходження точок перетину прямої та кривої поверхні беруть таку площину, щоб фігура перетину була найпростіша. На рис. 4.7 показано схеми розв'язання задачі побудови точок перетину прямої $a(A, B)$ з такими поверхнями:

- пірамідою — для неї, як для будь-якої багатогранної поверхні, допоміжну площину Γ можна взяти як проєкціювальну;
- похилим циліндром — допоміжна площина Γ паралельна до твірних циліндра та перетинає його по твірних;
- конусом — допоміжна площина Γ проходить через вершину конуса та перетинає його по твірних.

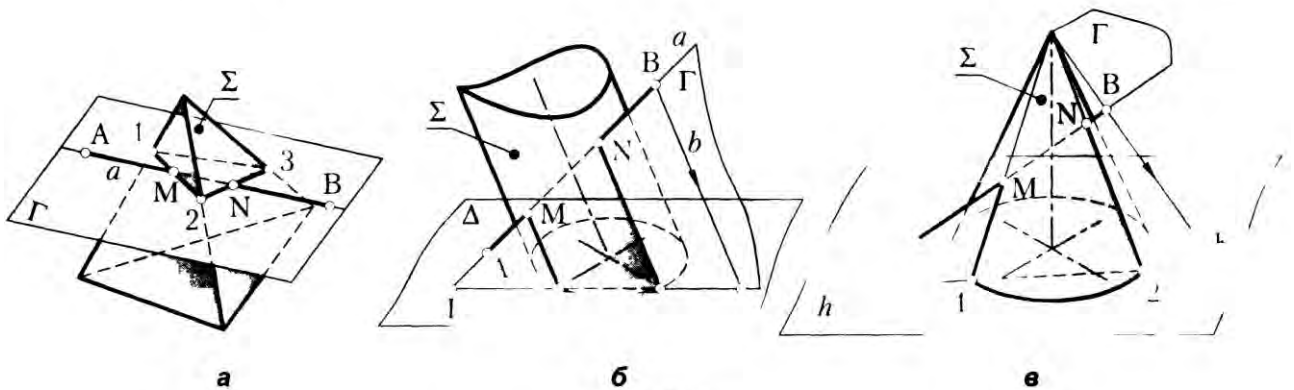


Рис. 4.7

Твірні перерізу поверхні циліндра та конуса допоміжною площиною проходять через точки 1, 2 перетину основи поверхонь з лінією LK перетину допоміжної площини з площиною основи поверхонь Δ .

На рис. 4.8 проілюстровано побудову точок перетину прямої a з поверхнею призми. Через пряму a проведено допоміжну проєкціювальну площину $\Gamma(\Gamma_2)$, яка перетинає призму по трикутнику. Перетин сторін трикутника з прямою a визначає точки M та N перетину прямої a з поверхнею призми.

На рис. 4.9 наведено комплексний рисунок розв'язання задачі побудови точок перетину прямої $a(A, B)$ з поверхнею циліндра Σ . Через точку B прямої a проведено пряму b паралельно до твірних циліндра. Прямі a та b задають допоміжну площину $\Gamma(a \cap b)$, яка перетинає поверхню циліндра по твірних 1N, 2M. Перетин твірних із прямою a визначає точки M та N перетину прямої a з поверхнею циліндра Σ .

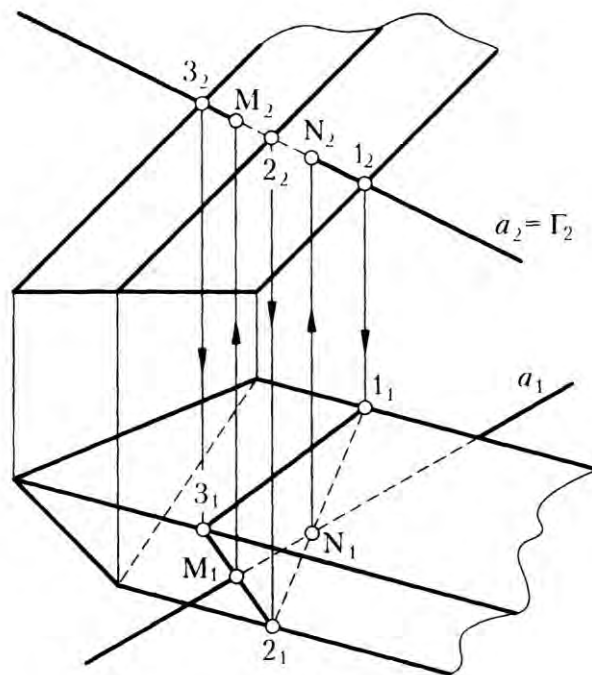


Рис. 4.8

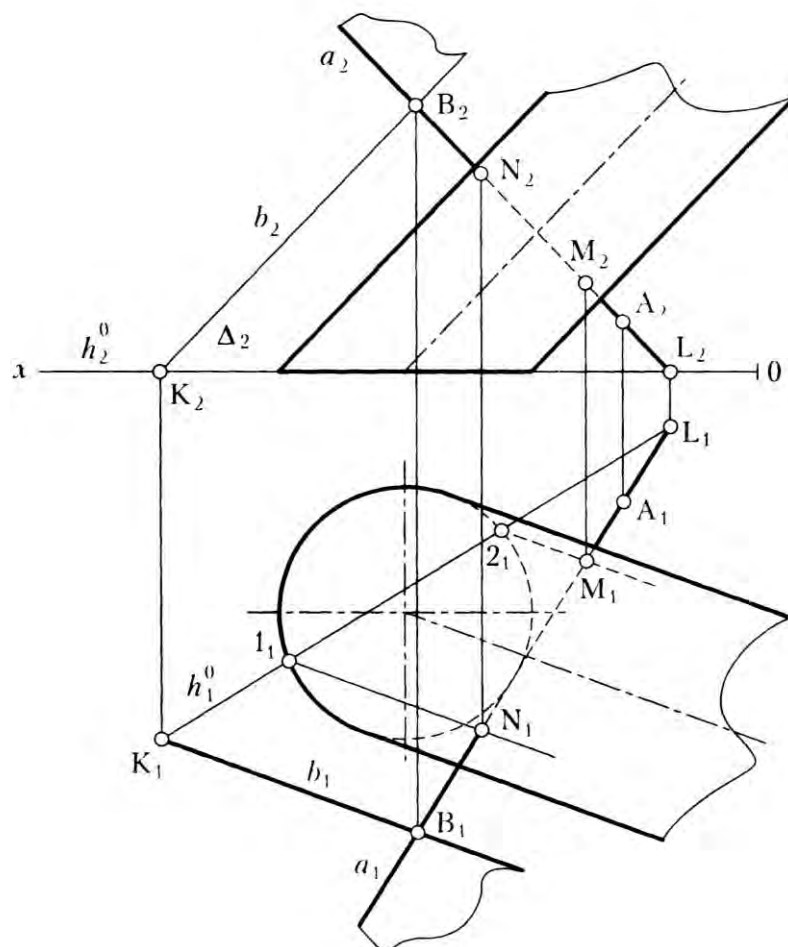


Рис. 4.9

На поданому нижче комплексному рисунку (рис. 4.10) розв'язано задачу побудови точок перетину прямої $a(A, B)$ з поверхнею конуса Σ . Пряму b , яка разом із заданою прямою a формує допоміжну площину $\Gamma(a \cap b)$, проведено через вершину конуса S . Площина Γ перетинає поверхню по твірних S_1 та S_2 , перетин яких із прямою a визначає точки M і N перетину прямої a та поверхні конуса Σ .

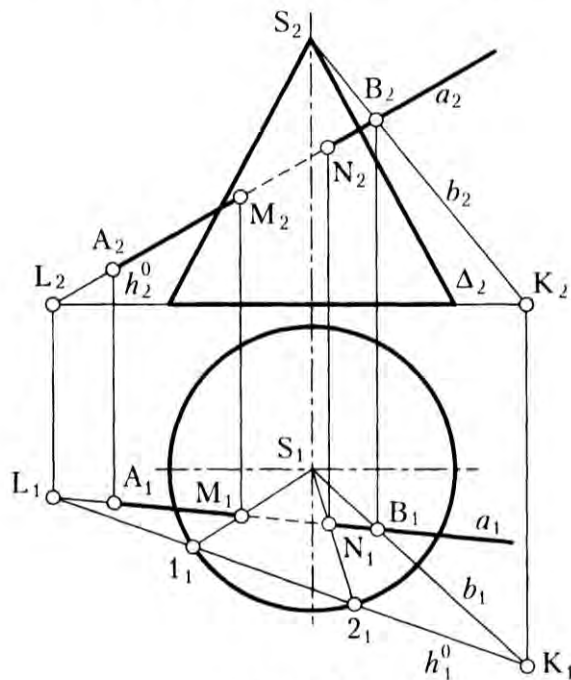


Рис. 4.10

На рис. 4.11 наведено комплексний рисунок розв'язання задачі знаходження точок перетину прямої $a(A, B)$ та поверхні сфери Σ . Через пряму a проведено допоміжну проєкціювальну площину $\Gamma(\Gamma_1)$. Точки перетину прямої a з лінією перерізу m поверхні сфери площиною Γ зручно знаходити в допоміжній площині проєкцій Π_4 , паралельній до площини Γ . Знайдені точки перетину M та N прямої a з поверхнею сфери проєкціюють на площини проєкцій Π_1 і Π_2 .

Для знаходження точок перетину поверхні обертання з прямою, що перетинає вісь цієї поверхні, можна використовувати головний меридіан такої поверхні.

Розглянемо комплексний рисунок розв'язання задачі перетину прямої a з поверхнею тора Σ (рис. 4.12). Допоміжна проєкціювальна площина $\Gamma(\Gamma_1)$, що проходить через пряму a , перетинає поверхню тора по меридіану, конгруентному до головного. Повернемо площину $\Gamma(\Gamma_1)$ разом з меридіанним перерізом та прямою a навколо осі тора і до суміщення з головним меридіаном.

Проекції точок перетину $\bar{N}_2$ та $\bar{M}_2$ нового положення прямої з головним меридіаном визначають шукані точки, які треба оберненим перетворенням знайти на фронтальній та горизонтальній площинах проєкцій.

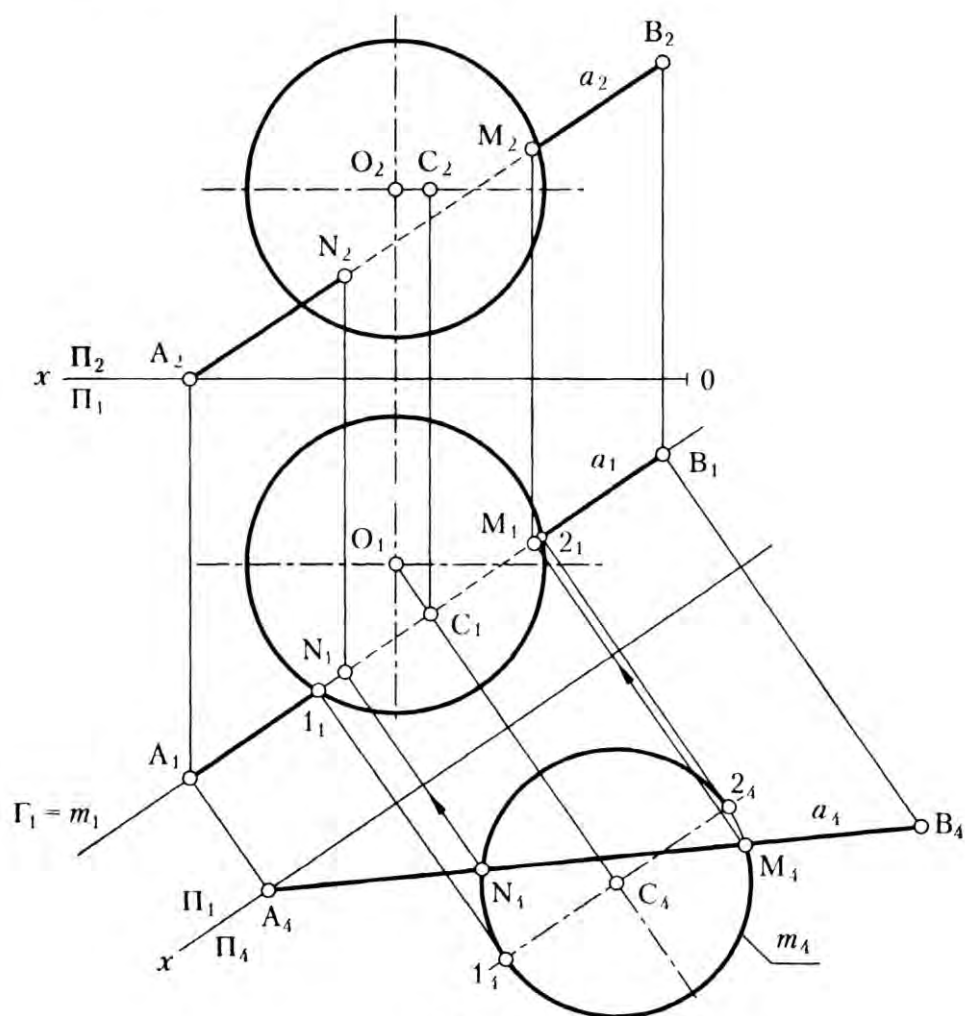


Рис. 4.11

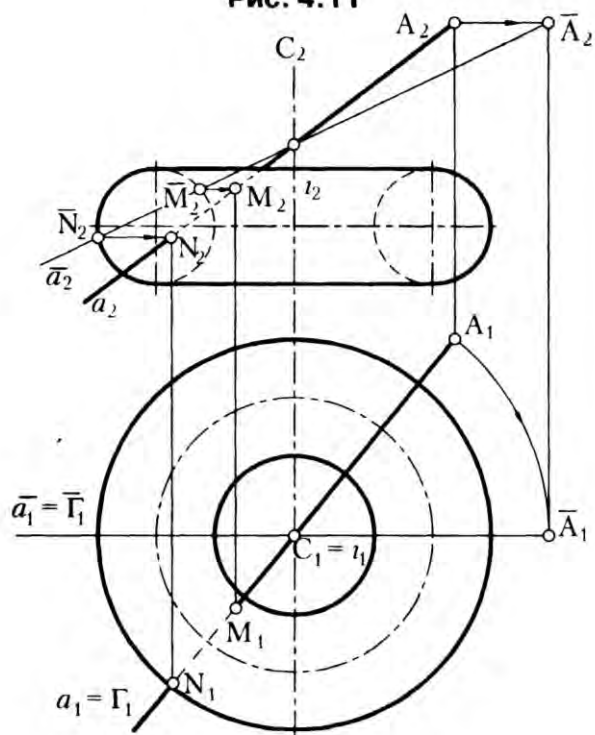


Рис. 4.12

Задача знаходження точок перетину прямої та поверхні спрощується, якщо один із заданих образів є проєкціювальним.

На рис. 4.13, *а* проілюстровано визначення точок перетину прямої *a* з прямим циліндром, а на рис. 4.13, *б* — з прямою призмою. Горизонтальні проєкції точок перетину визначаються перетином сліду-проєкції поверхні з відповідною проєкцією прямої.

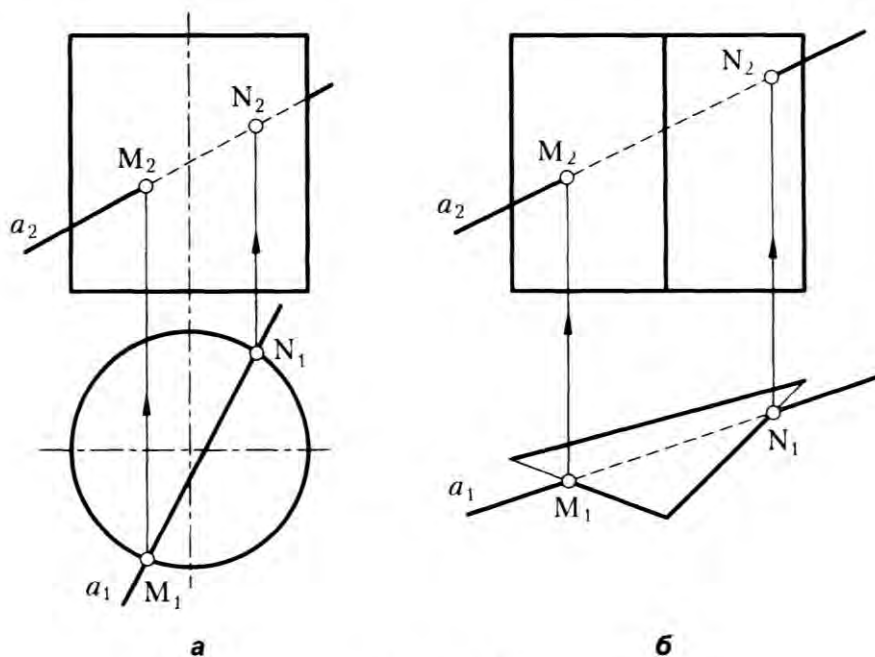


Рис. 4.13

На рис. 4.14 визначено перетин горизонтально-проєкціювальної прямої з поверхнею конуса. Точку перетину *М* знайдено за допомогою твірної конуса, горизонтальна проєкція якої проходить через слід-проєкцію прямої.

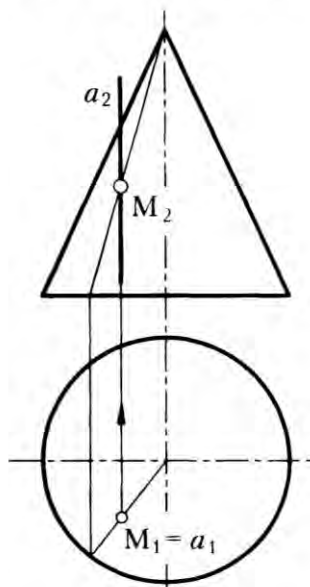


Рис. 4.14

4.3. Взаємний перетин поверхонь

Конструювання поверхонь технічних виробів, які, як правило, складаються з різних геометричних поверхонь, що зумовлено технологічними та експлуатаційними вимогами, потребує побудови ліній *переходу* або *ліній перетину* таких поверхонь

Лінія перетину двох поверхонь являє собою впорядковану множину точок, кожна з яких можна визначити як перетин ліній однієї поверхні з другою поверхнею

Форма лінії перетину залежить від форми та взаємного розташування поверхонь

Дві криволінійні поверхні перетинаються по просторовій кривій лінії, яка може розпадатися на простіші геометричні елементи — плоскі криві, прямі тощо

Перетин багатогранних поверхонь утворює просторову ламану

Якщо одна з поверхонь криволінійна, а друга багатогранна, то лінія перетину просторова ламана, ланками якої є дуги плоских кривих

За взаємним розміщенням поверхонь відносно одна одної розрізняють випадки перетину

- проникнення, коли одна поверхня повністю охоплює іншу і лінія перетину поверхонь розпадається на дві замкнені лінії,
- врубка чи врз, коли лінія перетину — єдина замкнена просторова лінія

Найбільш універсальний спосіб знаходження точок ліній переходу двох поверхонь — метод допоміжних січних поверхонь-посередників Його можна вважати узагальненням способу допоміжних площин-посередників для знаходження лінії перетину двох площин (див. підрозділ 2.1.1)

Для визначення спільних точок криві поверхні — два циліндри Σ та Δ — перегинають третьою поверхнею-посередником Γ — сферою (рис. 4.15). Криві a та b лінії перетину заданих поверхонь посередником перетинаються в точках 1 і 2, що належать лінії перетину поверхонь Σ та Δ . Щоб визначити необхідну кількість точок для побудови лінії взаємного перетину двох поверхонь, операцію повторюють, змінюючи положення чи розміри посередника. Алгоритм такої побудови має вигляд

$$1 \quad \Sigma \cap \Gamma = a, \Delta \cap \Gamma = b,$$

$$2 \quad a \cap b = 1, 2,$$

$$3 \quad !$$

Як посередників використовують площини (проекціювальні або загального положення), сфери, циліндри, конуси. Посередника та його положення слід вибирати так, щоб переріз поверхонь, які перетинаються ним, був найпростішим

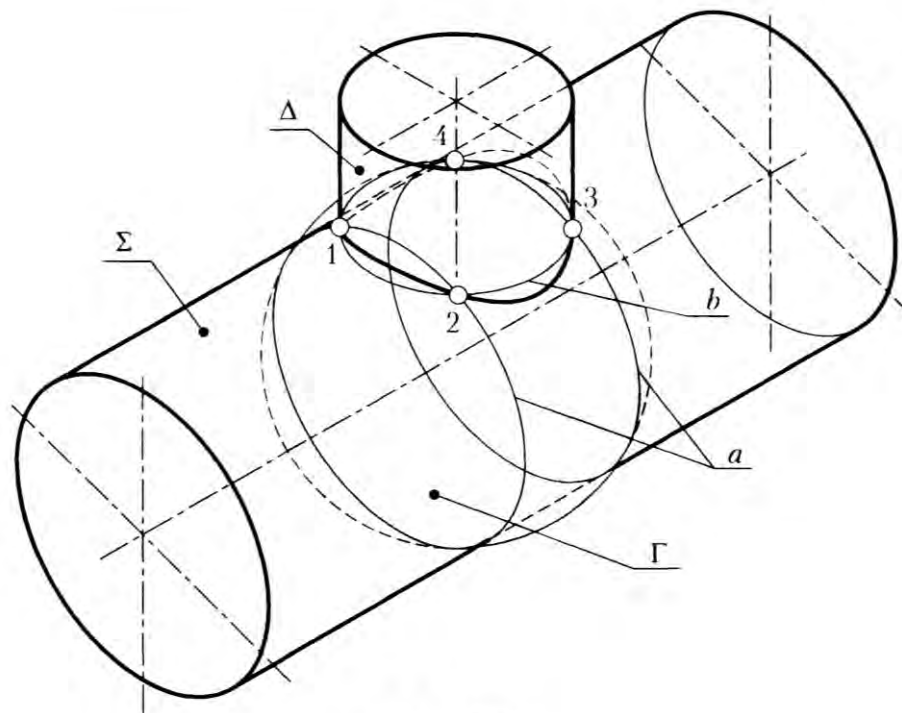


Рис. 4.15

Розглянемо алгоритм побудови лінії перетину двох поверхонь.

1. Вибрати посередників, які перетинають задані поверхні по найпростіших лініях, та визначити тип перетину (проникнення чи врубка).
2. Побудувати за допомогою посередників точки лінії перетину поверхонь:
 - характерні, до яких належать точки на обрисах поверхонь, найвищі та найнижчі, крайні ліві та крайні праві точки;
 - допоміжні точки.
3. З'єднати визначені точки з урахуванням видимості частин лінії перетину. Видимими є ті частини лінії перетину, які видимі для кожної з поверхонь, що перетинаються.

4.3.1. Побудова лінії перетину поверхонь за допомогою посередників-площин окремого положення

На рис. 4.16 проілюстровано побудову лінії перетину конуса та циліндра. Тип перетину — врубка.

Як посередників вибрано горизонтальні площини рівня Γ' , які перетинають конус по колах, а циліндр — по твірних. На рис. 4.16, б показано, як знайти точку 4 лінії перетину поверхонь у січній площині Γ . Площина Γ перетинає конус по колу b , а циліндр — по твірній a . Перетин ліній a та b визначає спільну для двох поверхонь точку 4.

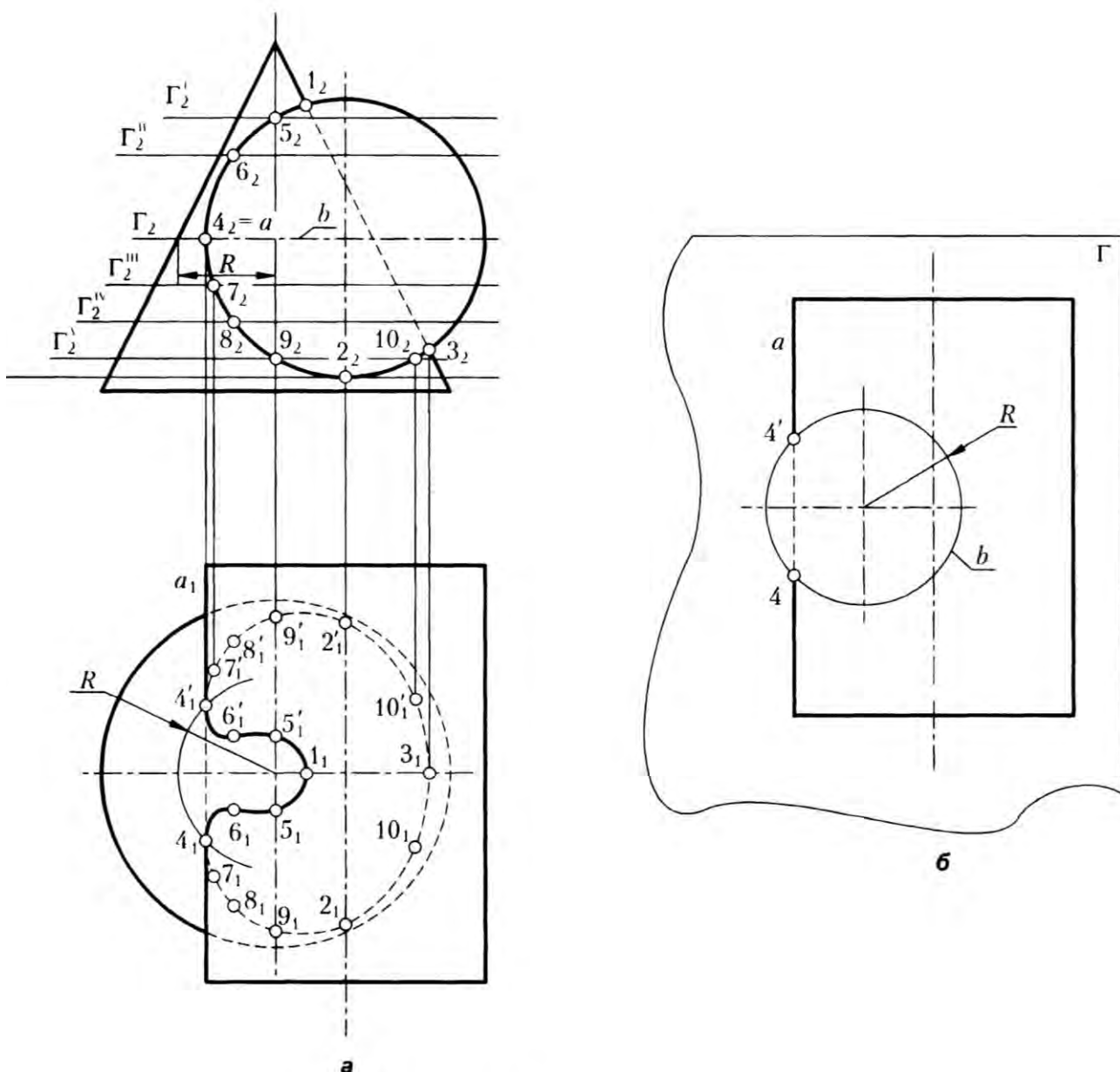


Рис. 4.16

Характерні точки лінії перетину: 1 та 2 — найвища та найнижча; 4 — крайня ліва, 3 — крайня права; 5, 9 — точки видимості для профільної проекції. Точки 6, 7, 8 — допоміжні.

Видимість проекції лінії перетину на горизонтальну площину проєкцій визначається циліндром, зокрема його точкою 4.

Розглянемо комплексний рисунок побудови ліній перетину поверхонь призми та піраміди (рис. 4.17). Тип перетину — проникнення. Лінію перетину побудовано як багатокутник, кожна ланка якого є перетин горизонтально-проєкціювальних граней призми з гранями піраміди.

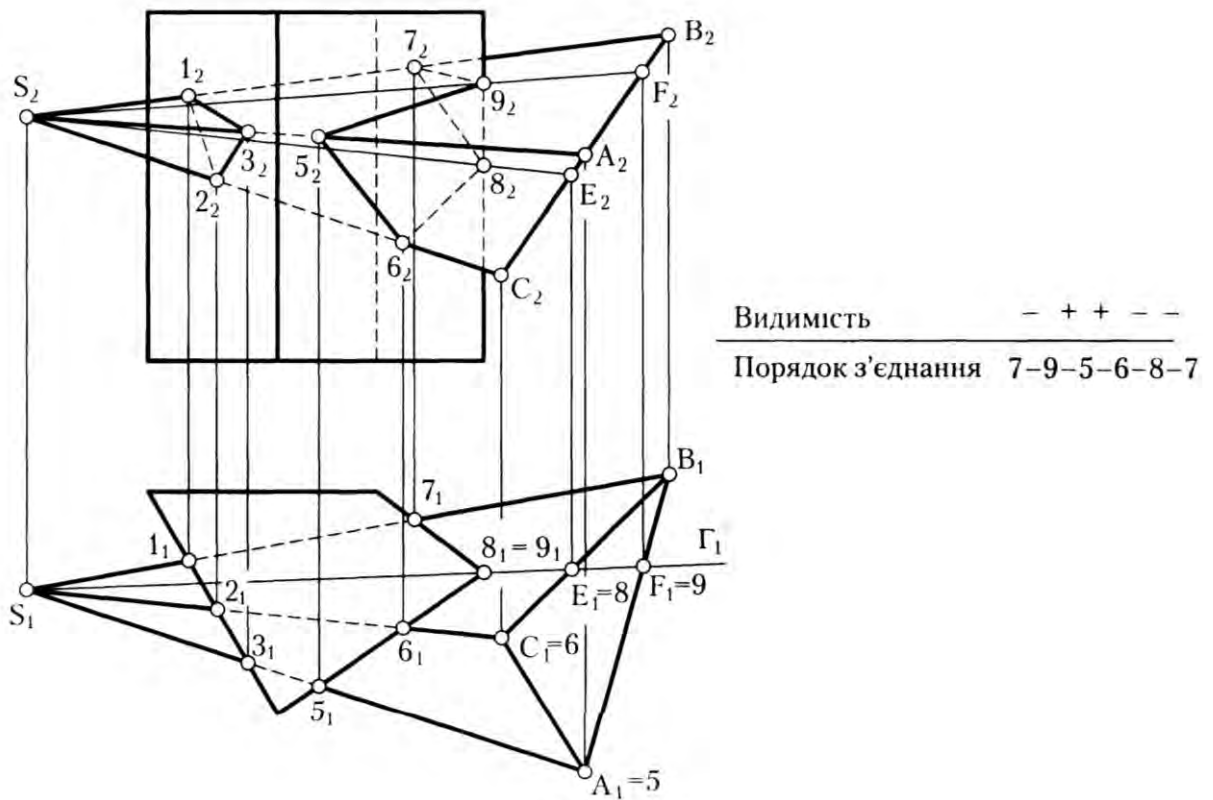


Рис. 4.17

Дві з вершин багатокутника (8, 9), які належать ребру призми, знайдено за допомогою допоміжної горизонтально-проекціовальної площини $\Gamma(\Gamma_1)$.

Порядок з'єднання вершин багатокутника перетину поверхонь визначено проєкціюванням горизонтальної проєкції лінії перетину на основу піраміди. Видимість ланок цієї лінії визначено з урахуванням їх видимості для кожної поверхні окремо.

4.3.2. Побудова лінії перетину поверхонь за допомогою посередників-площин загального положення

На рис. 4.18–4.20 наведено схеми побудови точок лінії перетину двох поверхонь, коли найпростіші перерізи поверхонь допоміжною площиною утворює площина загального положення.

Так, на рис. 4.18 перетинаються циліндр і конус. Січна допоміжна площина, що перетинає обидві поверхні по твірних, містить пряму, яка проходить через вершину конуса паралельно до твірних циліндра. Друга пряма, що утворює допоміжну площину, може бути будь-яка.

На рис. 4.18 основи поверхонь належать горизонтальній площині проєкцій, і така пряма є горизонтальним слідом допоміжної площини. Отже, допоміжна площина має визначник $\Gamma(MT \cap h^0)$. Змінюючи положення прямої h^0 , отримаємо сім'ю січних допоміжних площин.

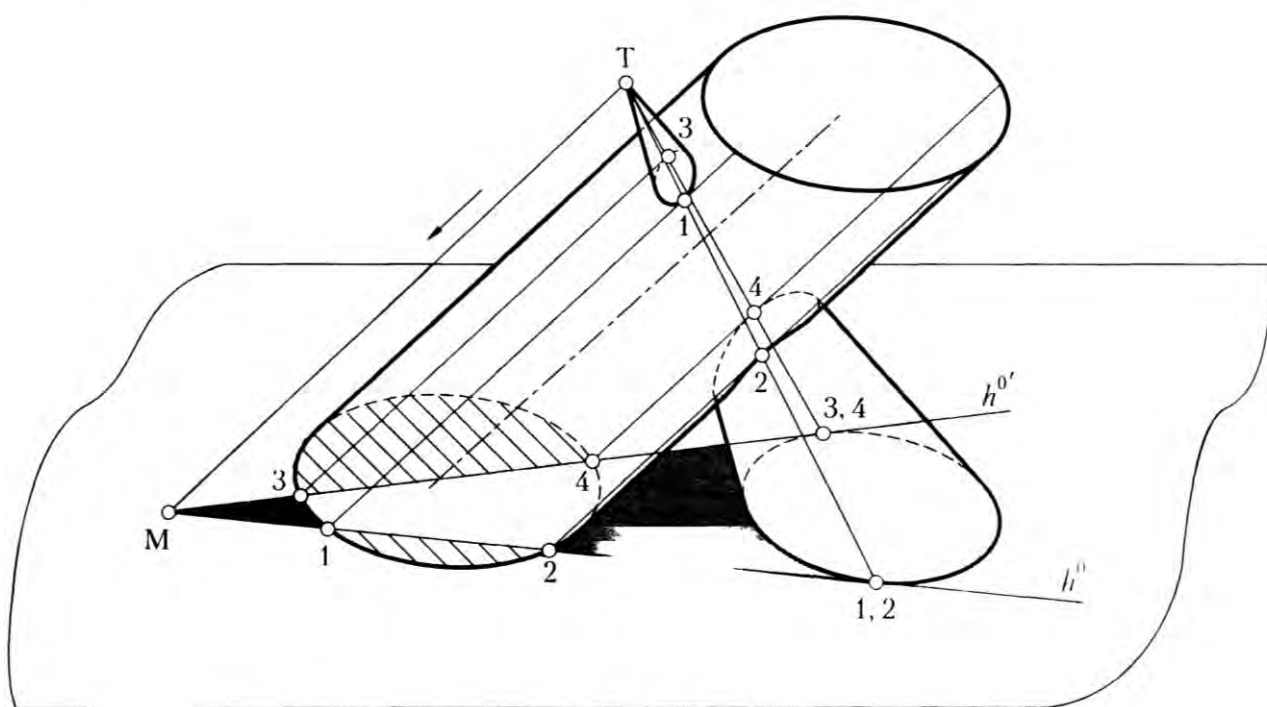


Рис. 4.18

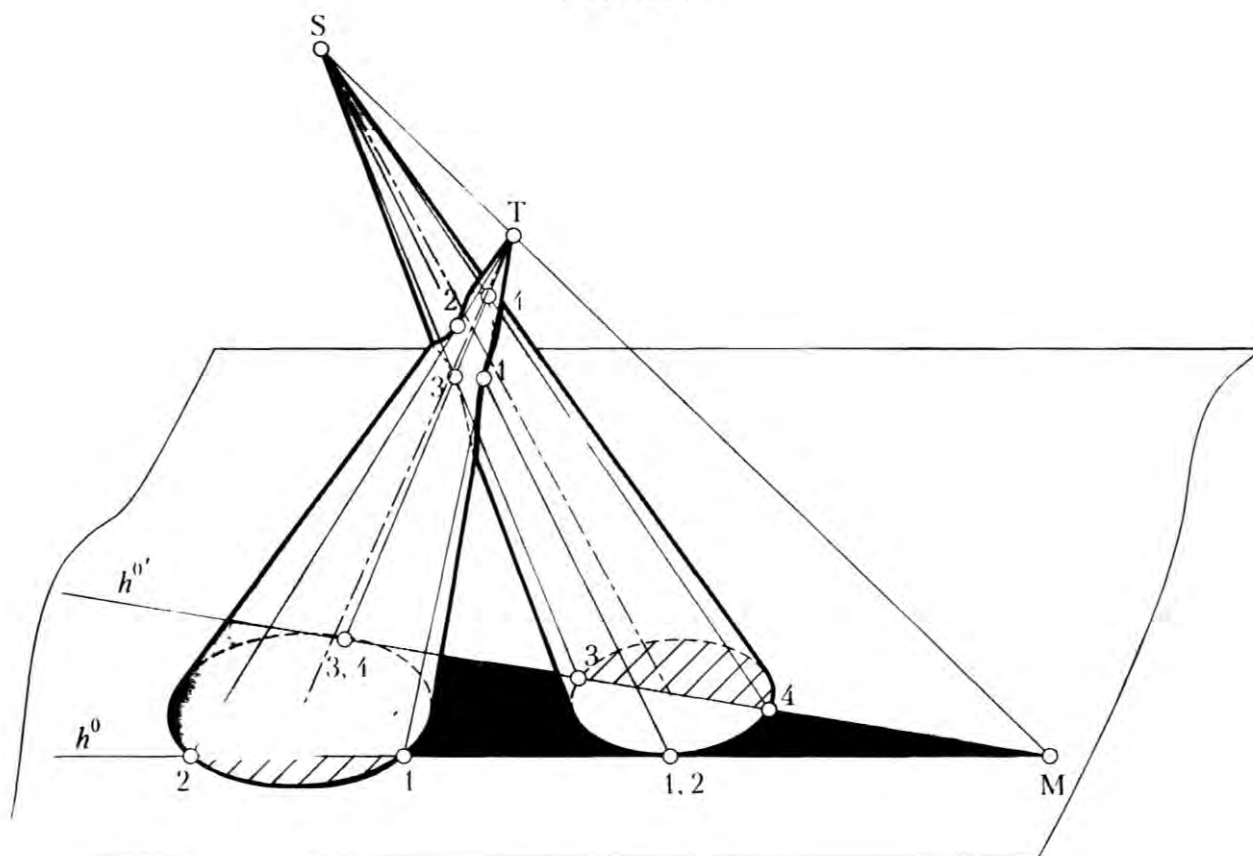


Рис. 4.19

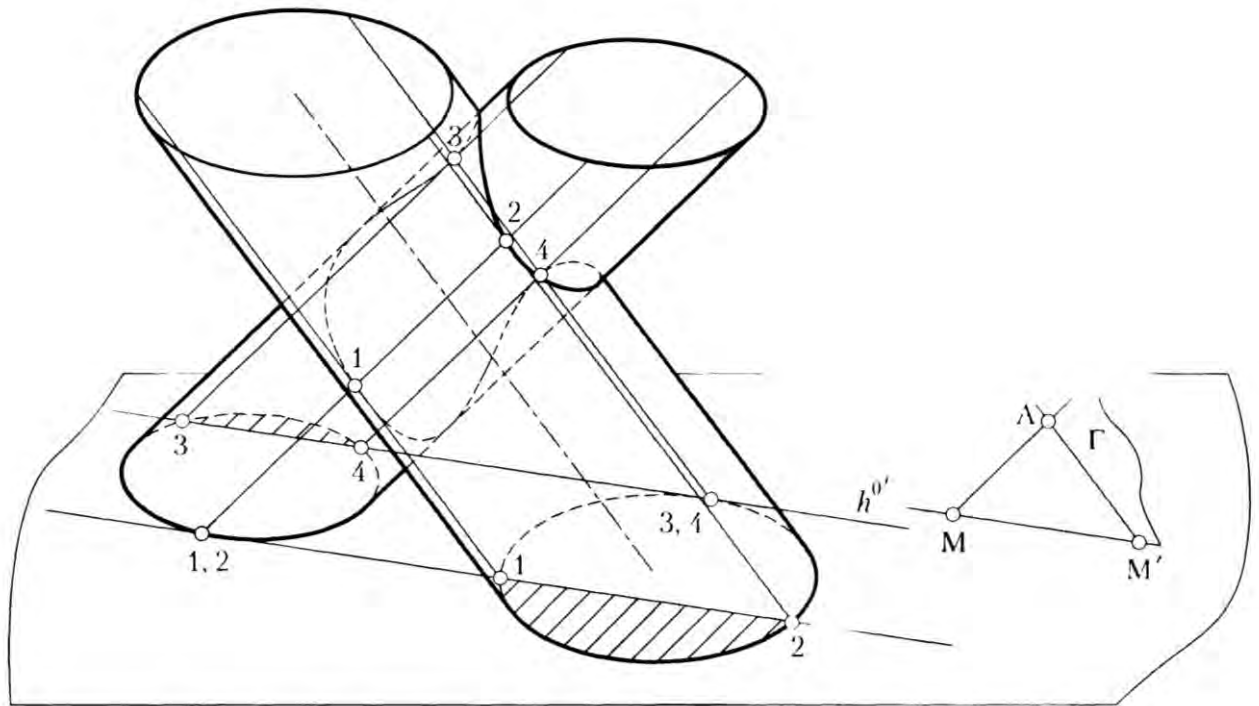


Рис. 4.20

Характерні точки лінії перетину поверхонь визначено за допомогою площин, дотичних до конуса. За розташуванням твірних циліндра, які не перетинають конус (від початкової точки твірної 1 до точки 2, від точки 3 до точки 4), визначаємо тип перетину — проникнення.

За такою схемою визначають лінію перетину для таких пар поверхонь: циліндр — піраміда, призма — конус, призма — піраміда.

На рис. 4.21 розглянуту схему реалізовано на комплексному рисунку для визначення лінії перетину поверхонь піраміди та призми. За допомогою площин $\Gamma(MT \cap h^0)$ та $\Gamma''(MT \cap h^{0''})$ визначено тип перетину — проникнення. Порядок з'єднання точок визначають проєкціюванням точок лінії перетину на основи поверхонь.

На рис. 4.19 наведено схему побудови точок лінії перетину конуса з конусом. У цьому разі січна допоміжна площина, що перетинає поверхні по твірних, містить вершини поверхонь S і T . Сім'ю допоміжних площин задано прямою ST та прямою, яка належить площині основ поверхонь. Характерні точки лінії перетину та тип перетину — врубка — визначено за допомогою площин, дотичних до поверхонь. Ця схема застосовна до таких пар поверхонь, як піраміда — піраміда, піраміда — конус.

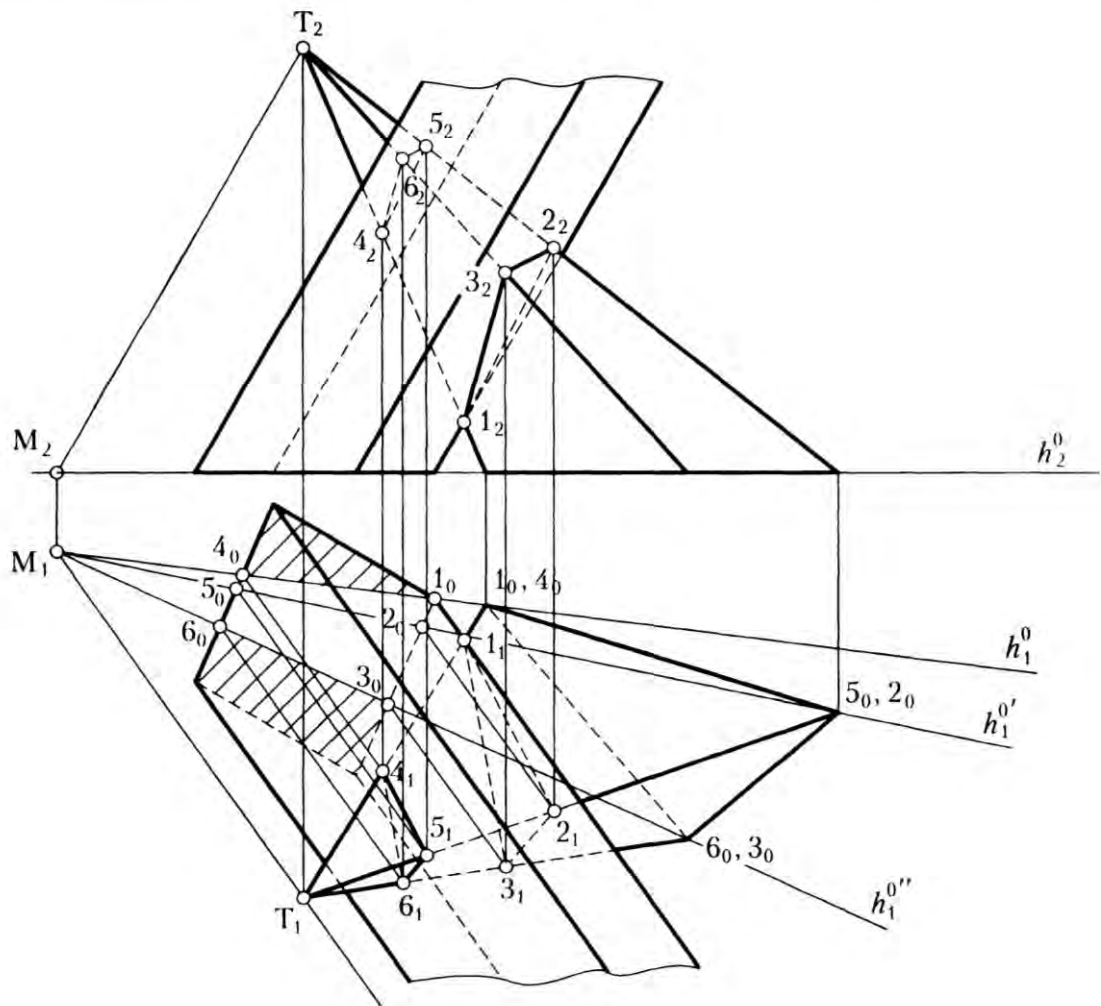


Рис. 4.21

На рис. 4.20 зображено схему побудови точок лінії перетину двох циліндрів. Допоміжну січну площину $\Gamma(MA \cap AM')$ задано двома прямими, паралельними до твірних циліндрів. Сім'ю січних допоміжних площин утворено паралельними до Γ площинами. Характерні точки лінії перетину та тип перетину — врубка — визначено за допомогою площин, дотичних до циліндрів.

4.3.3. Побудова лінії перетину поверхонь за допомогою сферичних посередників

Спосіб сферичних посередників використовують для побудови лінії перетину поверхонь обертання чи поверхонь, які мають сім'ю колових перерізів.

Цей спосіб базується на тому, що сфера з центром на осі поверхні обертання перетинає таку поверхню по колах (див. рис. 4.15). Коло перетину сфери з поверхнею обертання проєкціюється на їх спільну площину симетрії відрізком прямої (на рис. 4.22 — a і b). Слід нагадати, що для сфери будь-яка пряма та площина, що проходять через її центр, є відповідно віссю та площиною симетрії.

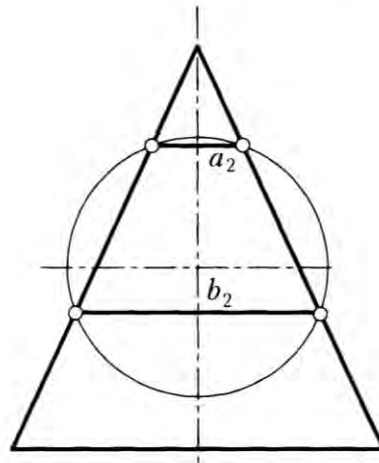


Рис. 4.22

Осі поверхонь, для знаходження лінії перетину яких використовують цей спосіб, мають перетинатися та задавати площину, паралельну до площини проєкцій.

Реалізація способу сферичних посередників має два різновиди:

- концентричних сфер-посередників, коли всіх посередників будують з одного центра;
- ексцентричних сфер-посередників, коли всіх посередників будують з різних центрів.

Використання концентричних сфер-посередників

На рис. 4.23 показано побудову фронтальної проєкції лінії перетину двох циліндрів за допомогою концентричних сфер, центром яких є точка перетину осей циліндрів.

Характерні точки лінії перетину визначають так:

1. Найнижчу точку 1 (або найвищу 1' для другої кривої лінії перетину) — за допомогою сфери радіусом $R_{\min}$, дотичної до найвіддаленішої твірної поверхонь, які перетинаються. На рис. 4.23 вона дотична до поверхні більшого циліндра ($\emptyset A$) вздовж лінії m . Така сфера перетинає менший циліндр ($\emptyset B$) по колу n . Перетин кіл m та n визначає точку 1 лінії перетину поверхонь.
2. Точки перетину твірних (2, 3; 2', 3') — також за допомогою сфери радіусом $R_{\max}$ як перетин відповідних кіл-перерізів циліндрів сферою.

Допоміжні точки лінії перетину поверхонь визначають перерізами циліндрів сферами радіусами в проміжку між $R_{\max}$ та $R_{\min}$.

Лінія перетину двох циліндрів є кривою четвертого порядку.

Теорема Глазунова. Якщо дві поверхні другого порядку мають спільну площину симетрії, то лінія їх перетину проєкціюється на цю площину кривою другого порядку.

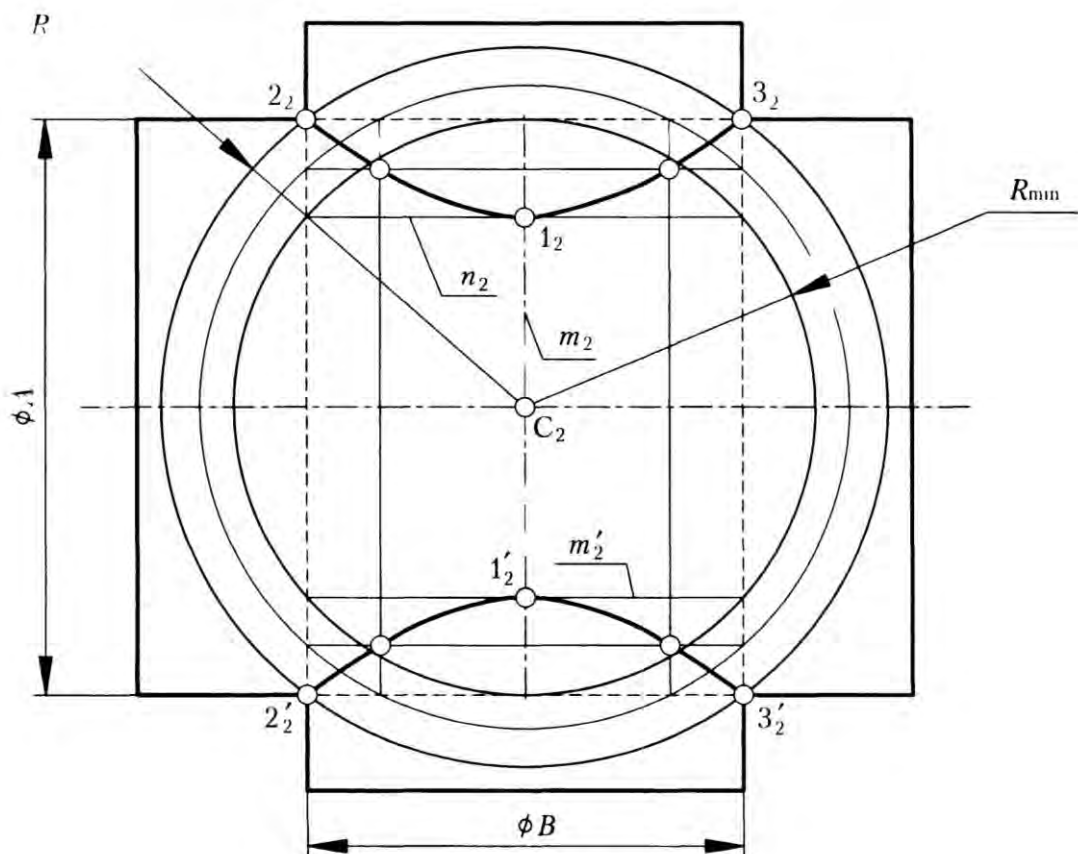


Рис. 4.23

На рис. 4.23 лінія перетину двох циліндрів проєкціюється на фронтальну площину проєкцій, паралельну до спільної площини симетрії поверхонь, гіперболою. Якщо діаметри циліндрів однакові, то точки 1 та 1' збігаються з точкою С, лінія перетину розпадається на два еліпси, а на проєкції маємо виродження гіперболи у дві прямі, що перетинаються.

Використання ексцентричних сфер-посередників

Розглянемо побудову лінії перетину конуса та сфери на комплексному рисунку (рис. 4.24). Оскільки сфера має нескінченну множину осей симетрії, будь-яку точку осі конуса можна взяти як центр допоміжної січної сфери.

Характерні точки лінії перетину сфери та конуса визначають так.

1. Найвищу точку 1 та найнижчу 2 — перетином обрисів поверхонь;
2. Крайню ліву точку 3 — за допомогою січної сфери з центра С(С2), дотичної до твірних конуса вздовж кола $m(m_2)$, яка перетинає задану сферу по колу $n(R_{\min})$.

Проміжні точки 4–6 визначено за допомогою січних сфер із центрами C' , C'' , C''' на осі конуса. Проекція лінії перетину на фронтальну площину проєкцій є параболою.

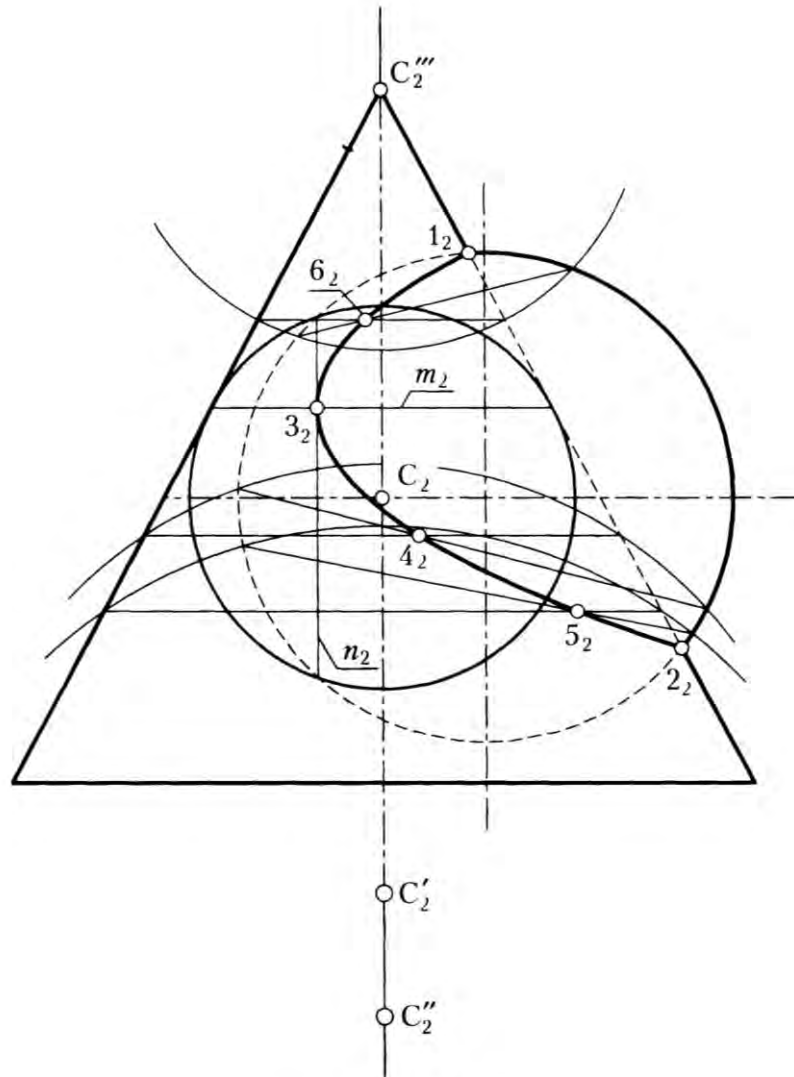


Рис. 4.24

На рис. 4.25 наведено приклад застосування способу ексцентричних сфер для визначення фронтальної проєкції лінії перетину поверхонь, коли одна з поверхонь — тор, тобто трубчаста поверхня, що має сім'ю колових перерізів, а друга — конус. Поверхні мають спільну площину симетрії.

Характерні точки — найнижчу 1 й найвищу 2 задано перетином контурних твірних конуса та контурної твірної тора на фронтальній проєкції.

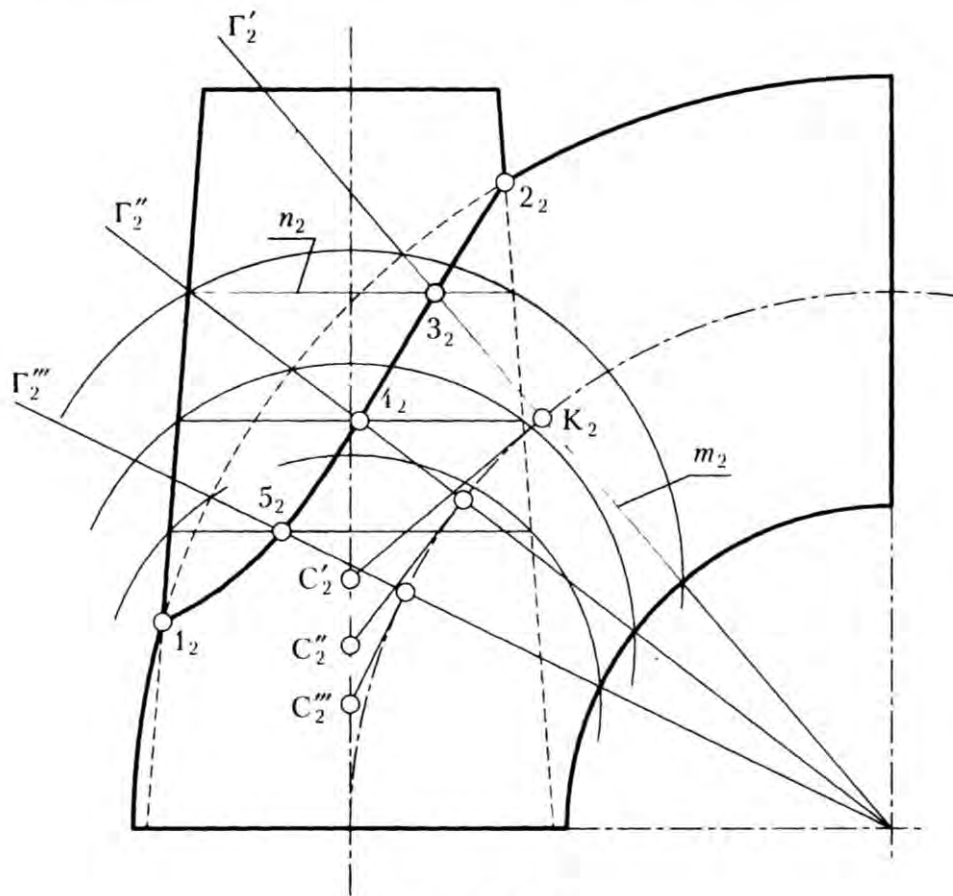


Рис. 4.25

Для визначення проміжних точок через вісь тора проводять пучок фронтально-проекціювальних площин $\Gamma(\Gamma_2)$, які перетинають тор по колових перерізах $m(m_2)$. Кожен коловий переріз вважають «миттєвим» циліндром обертання, точку перетину якого з поверхнею конуса можна визначити за загальним алгоритмом:

- провести вісь «миттєвого» циліндра, яка є перпендикуляром до колового перерізу m у центрі K ;
- знайти точку перетину C осі циліндра з віссю конуса;
- провести сферичний посередник, який перетинає «миттєвий» циліндр по колу m , а конус — по колу n ;
- перетин перерізів m та n визначає точку 3 лінії перетину конуса з тором.

Аналогічно будують інші проміжні точки.

4.3.4. Особливі випадки перетину поверхонь другого порядку

Перетин поверхонь другого порядку по плоских кривих широко застосовують у розв'язуванні технічних задач.

Лінія перетину двох поверхонь другого порядку є просторова крива четвертого порядку, яка може розпадатися на простіші лінії: дві криві другого порядку, пряму та криву третього порядку, чотири прямі, криву другого порядку та дві прямі.

Для розв'язання технічних задач найважливіше те, що крива розпадається на дві плоскі криві другого порядку. Умови, за яких це можливо, відображено в наведених нижче теоремах.

Теорема 1. Якщо дві поверхні другого порядку перетинаються по одній кривій другого порядку, то вони перетинаються ще по одній кривій другого порядку.

На рис. 4.26 показано перетин прямого кругового конуса з еліптичним циліндром. Обидві поверхні мають спільну напрямну — коло AC . Друга крива їх перетину — частина еліпса NM також плоска. На рис. 4.27 зображено перетин сфери з еліптичним конусом, основа якого — екватор AC сфери. Тоді й друга лінія перетину поверхонь являє собою коло.

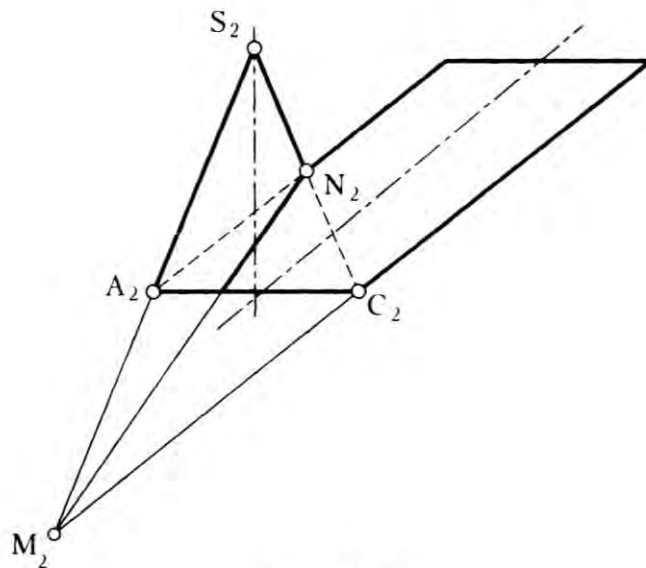


Рис. 4.26

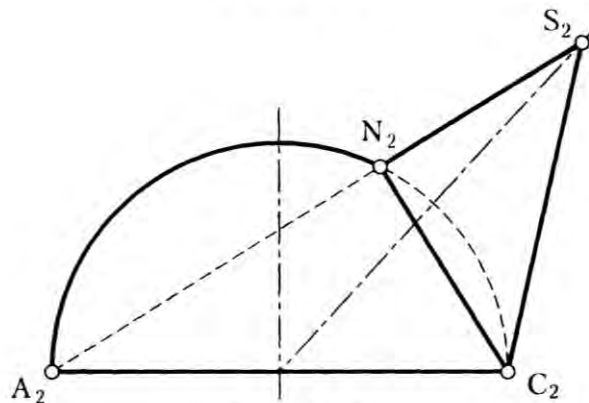


Рис. 4.27

Теорема 2 (про подвійний дотик). Якщо дві поверхні другого порядку мають дві точки дотику, то лінія їх перетину розпадається на дві криві другого порядку площини яких проходять через пряму, що сполучає точки дотику

Розглянемо комплексні рисунки перетину кругового циліндра й еліптичного конуса (рис. 4.28), а також двох циліндрів кругового та еліптичного (рис. 4.29). Лінія перетину поверхонь складається з двох плоских кривих, які проходять через пряму АВ, що з'єднує точки дотику

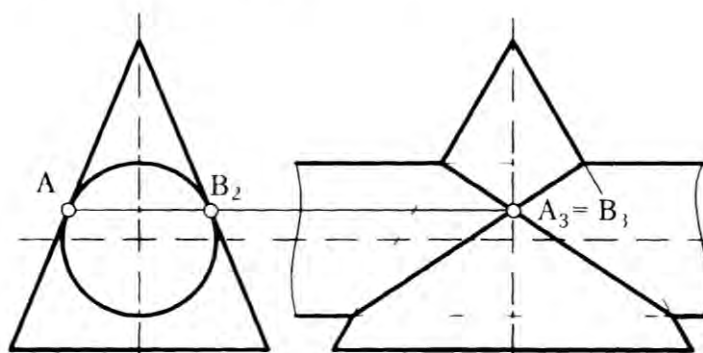


Рис. 4.28

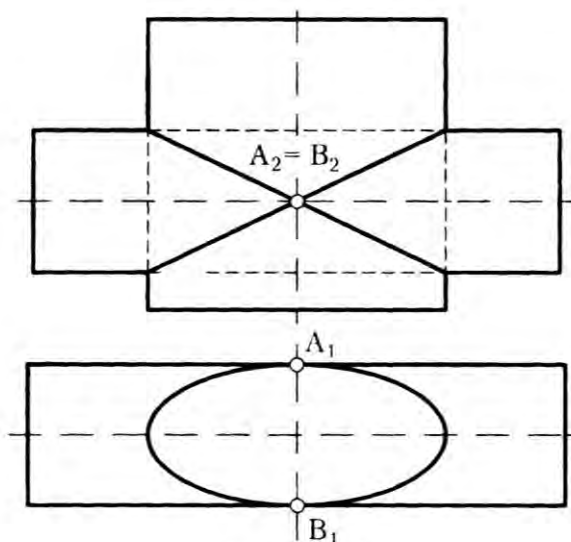


Рис. 4.29

На рис. 4.30, 4.31 показано, як за допомогою січної сфери, що має з поверхнями еліптичного циліндра та еліптичного конуса дві точки дотику, знайти на цих поверхнях колові перерізи

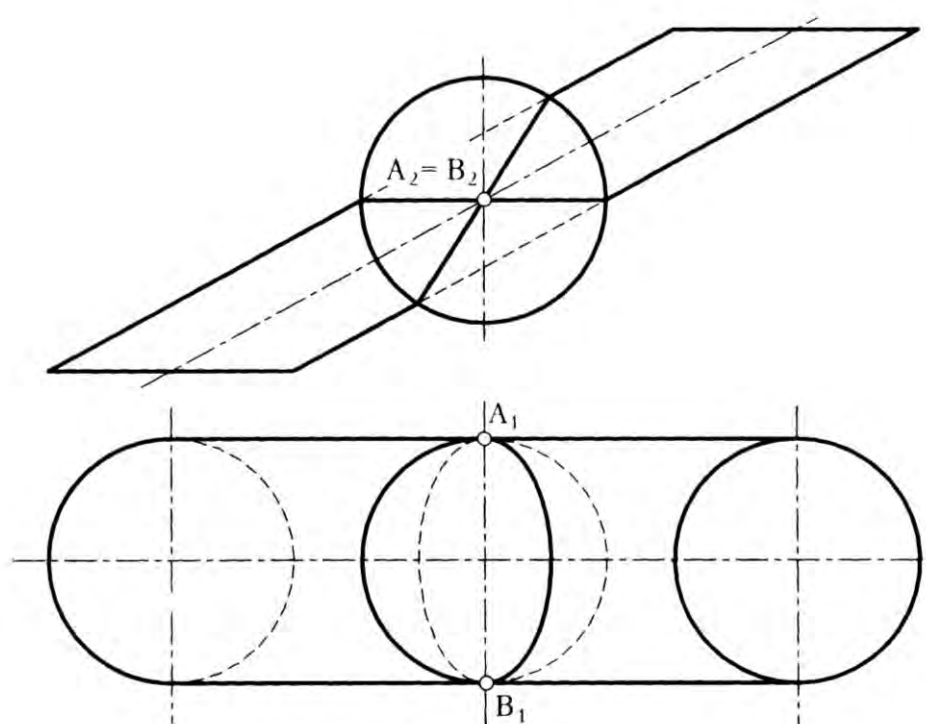


Рис. 4.30

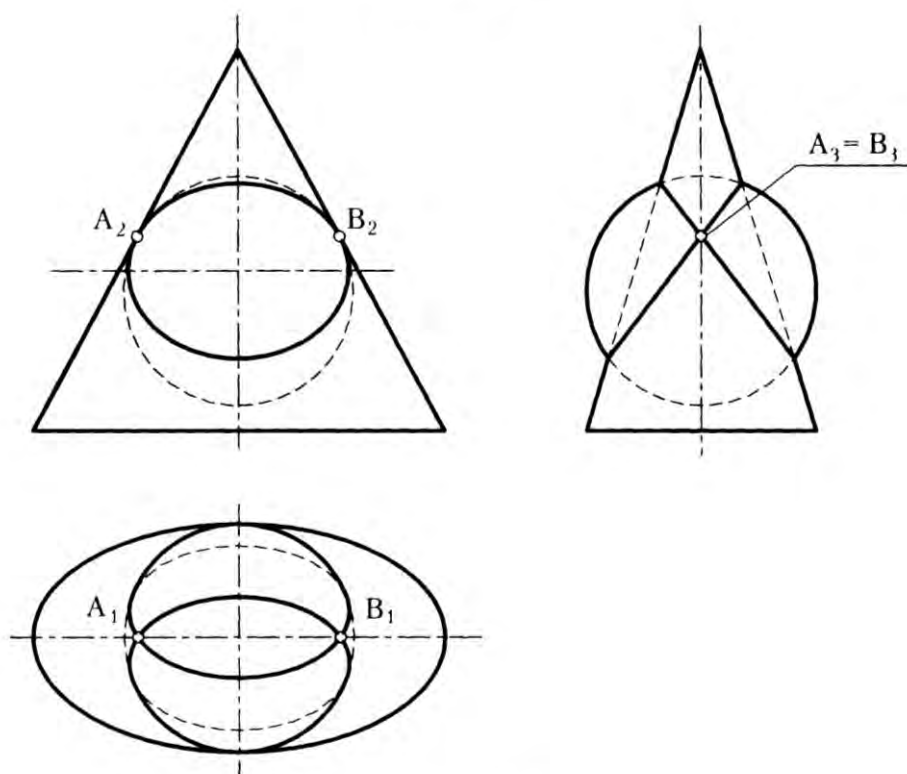


Рис. 4.31

Теорема 3 (Монжа). Якщо дві поверхні другого порядку описано навколо третьої поверхні другого порядку або вписано в неї, то вони перетинаються по двох плоских кривих. Площини таких кривих проходять через пряму, що сполучає точки дотику.

Теорема Монжа є окремим випадком теореми про подвійний дотик.

На рис. 4.32, 4.33 наведено приклади використання теореми для знаходження лінії перетину двох конусів, описаних навколо сфери, та двох еліпсоїдів, вписаних у сферу.

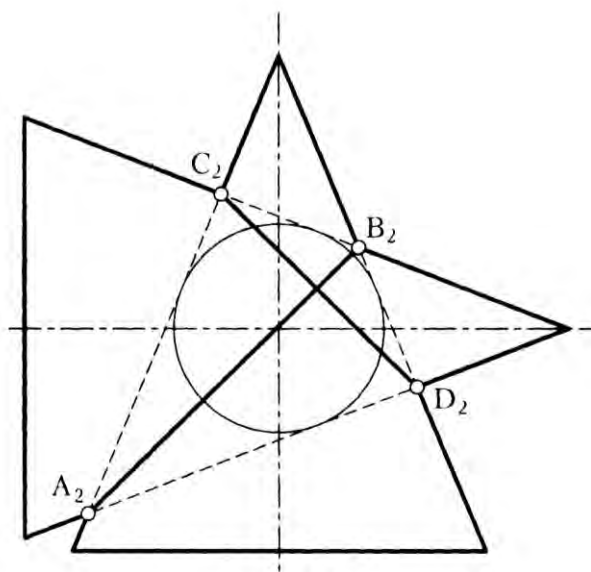


Рис. 4.32

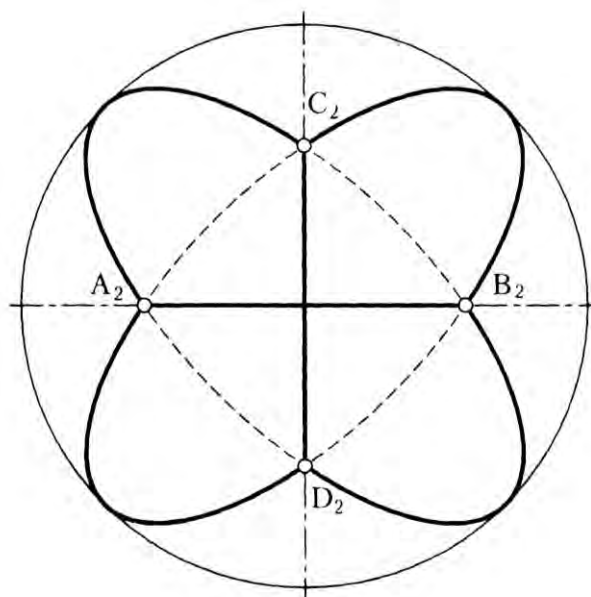


Рис. 4.33

Запитання для самоперевірки

1. Яку лінію називають перерізом?
2. Наведіть алгоритм побудови лінії перерізу поверхні площиною.
3. Які точки лінії перерізу називають характерними?
4. Як побудувати лінію перерізу поверхні січною площиною загального положення?
5. Наведіть алгоритм знаходження точок перетину прямої та поверхні.
6. Які площини використовують для знаходження точок перетину прямої та поверхні?
7. У яких випадках для знаходження точок перетину прямої та поверхні використовують площину загального положення?
8. Які типи ліній отримують унаслідок перетину двох поверхонь?
9. Який метод використовують для знаходження точок лінії перетину?
10. Які типи посередників та у яких випадках використовують для знаходження лінії перетину двох поверхонь?
11. У чому полягають особливості перетину двох поверхонь другого порядку?

Розділ 5

АксонOMETричні проєкції

- ♦ Прямокутна аксонометрія
- ♦ Косокутна аксонометрія

В інженерній практиці кресленики, як правило, складаються з двовимірних прямокутних проєкцій просторових об'єктів, що дає можливість розв'язувати різноманітні конструкторські та технологічні задачі. Однак коли на проєкції немає одного з вимірів об'єкта, наочність зображень зменшується.

Сучасні графічні пакети мають потужні засоби для моделювання об'єктів у тривимірному просторі, що не тільки надає зображенню наочності, але й дає змогу застосувати до створеної моделі операції зафарбовування, тонування, анімації.

Теоретичною базою тривимірного моделювання об'єктів є положення аксонометричного проєкціювання. В інженерній практиці, як правило, використовують паралельне аксонометричне проєкціювання.

Таке проєкціювання оборотне, тому що об'єкт прив'язано до просторової декартової системи координат, і він разом з нею проєкціюється на площину аксонометричних проєкцій. Основною теоремою паралельної аксонометрії є *теорема Польке-Шварца*: будь-які три відрізки на площині, що виходять з однієї точки, можна розглядати як паралельні проєкції трьох рівних та взаємноперпендикулярних відрізків у просторі.

Теорема передбачає свободу вибору осей аксонометричних зображень.

На рис. 5.1 наведено схему проєкціювання точки A на аксонометричну площину проєкцій Π' . Напрямок проєкціювання s показано стрілкою. Він не збігається з жодною з осей проєкцій. Осі OX , OY , OZ ортогональної системи координат проєкціюються на Π' в осі аксонометричної системи $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$.

Точку $A(x, y, z)$ задано в декартовій системі координат. Якщо спроекціювати її на горизонтальну площину XOY , то можна побудувати координатну ламану OA_xA_1A , довжина ланок якої відповідає дійсним координатам точки A . У площині аксонометричних проєкцій такій ламаній відповідає аксонометрична координатна ламана $O'A'_xA'_1A'$, де точка A' — аксонометрична проєкція точки A , а A'_1 — її вторинна проєкція. Довжина ланок такої ламаної відрізняється від дійсних координат точки A .

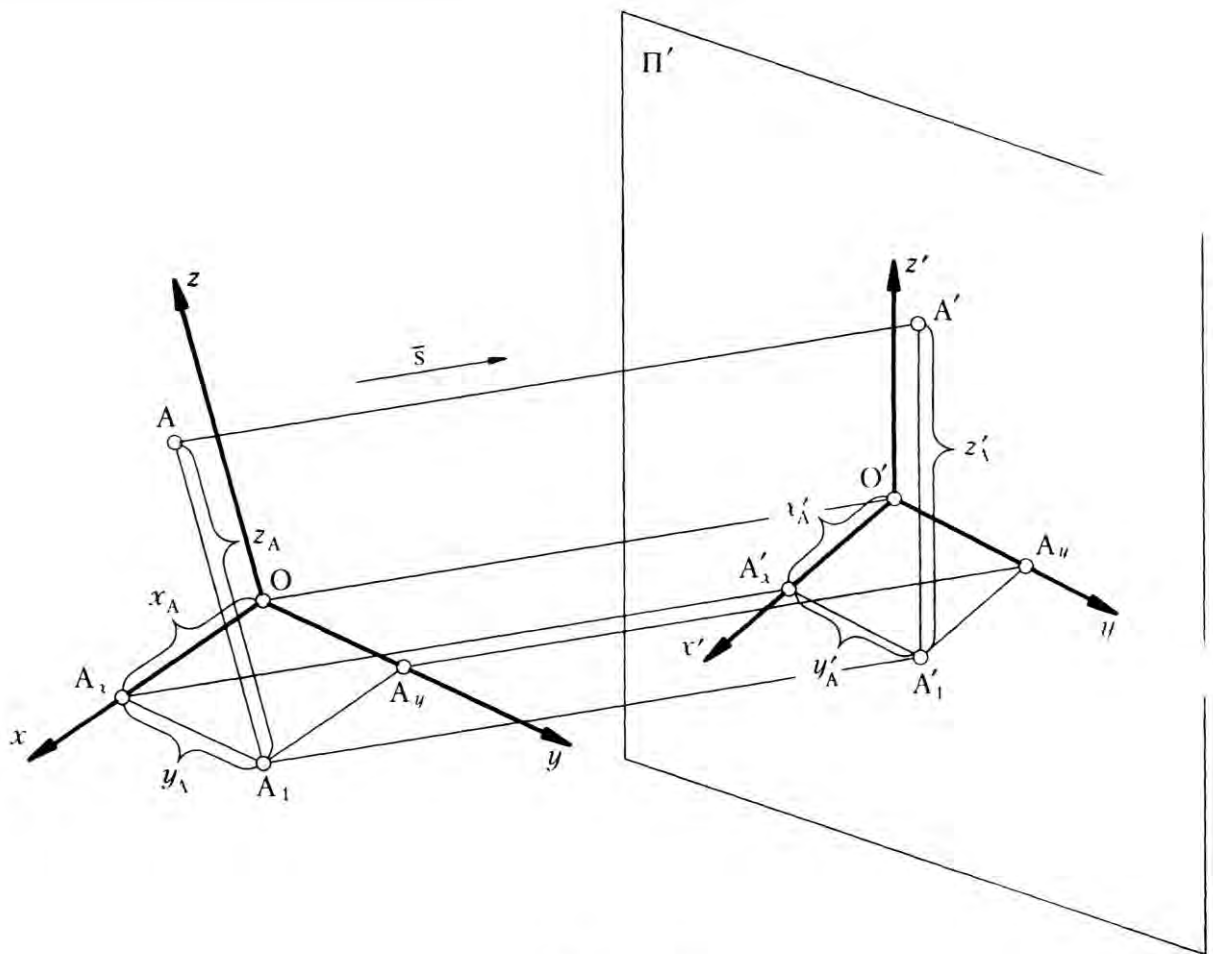


Рис. 5.1

Відношення аксонометричних проекцій відрізків до їх дійсних величин називають *коефіцієнтами (показниками) спотворення*:

$$\frac{O'A'_x}{OA_x} = \frac{x'}{x} = p, \quad \frac{O'A'_y}{OA_y} = \frac{y'}{y} = q, \quad \frac{A'A'_z}{AA_z} = \frac{z'}{z} = r.$$

Аксонометричні проекції поділяють на *триметричні*, коли всі три коефіцієнти спотворення різні, *диметричні*, коли два з них однакові, та *ізометричні*, коли всі три коефіцієнти однакові.

Якщо напрям s проєкціювання перпендикулярний до площини Π' , то аксонометрична проєкція називається прямокутною, в іншому разі — косокутною. У прямокутній аксонометрії залежність між коефіцієнтами спотворення має вигляд

$$p^2 + q^2 + r^2 = 2.$$

У косокутній ця залежність така:

$$p^2 + q^2 + r^2 = 2 + \operatorname{ctg}^2 \varphi,$$

де φ — кут між напрямком проєкціювання та площиною аксонометричних проєкцій.

В інженерній практиці відповідно до ГОСТ 2.317–69 використовують дві прямокутні аксонометричні проєкції: ізометрію та диметрію — і три косокутні: фронтальну ізометрію, диметрію та горизонтальну ізометрію. Найбільшого поширення набули три типи аксонометричних проєкцій: дві прямокутні — ізометрія та диметрія — й одна косокутна — фронтальна диметрія.

5.1. Прямокутна аксонометрія

У прямокутній *ізометрії* (рис. 5.2) коефіцієнти спотворення за всіма трьома координатними осями однакові $p = q = r$. Згідно із залежністю $p^2 + q^2 + r^2 = 2$ коефіцієнти спотворення $p = q = r = 0,82$. Точний аксонометричний кресленик в ізометрії виконують за координатами $x' = 0,82x$, $y' = 0,82y$, $z' = 0,82z$.

Для спрощення побудови користуються коефіцієнтами спотворення, які дорівнюють одиниці: $p = q = r = 1$. Такі коефіцієнти називають зведеними. У цьому разі зображення збільшується в 1,22 рази відносно прямокутних проєкцій. Отриманий аксонометричний кресленик називають *зведеним*.

Для графічних побудов зазвичай користуються лише зведеними коефіцієнтами.

В прямокутній *диметрії* (рис. 5.3) коефіцієнти спотворення для двох координатних осей однакові: $p = r$. Для третьої координатної осі коефіцієнт спотворення $q = 0,5p$. Точні значення коефіцієнтів спотворення в диметрії такі: $p = r = 0,94$, $q = 0,47$. Точний аксонометричний кресленик у диметрії виконують за координатами $x' = 0,94x$, $y' = 0,47y$, $z' = 0,94z$. Аксонометричні координати зведеного креслення дорівнюють $x' = x$, $y' = 0,5y$, $z' = z$. Зведене зображення збільшується в 1,06 рази.

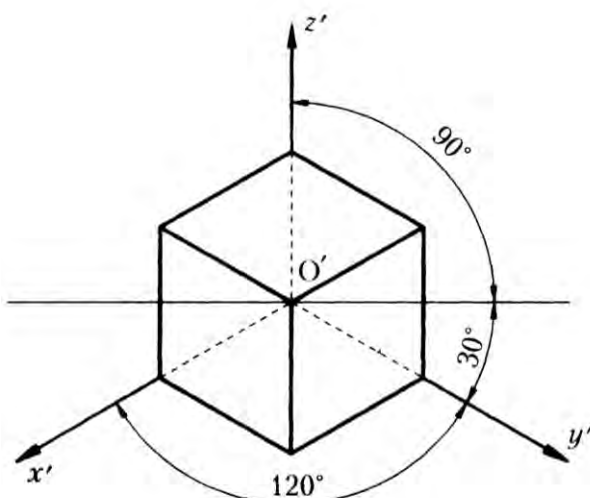


Рис. 5.2

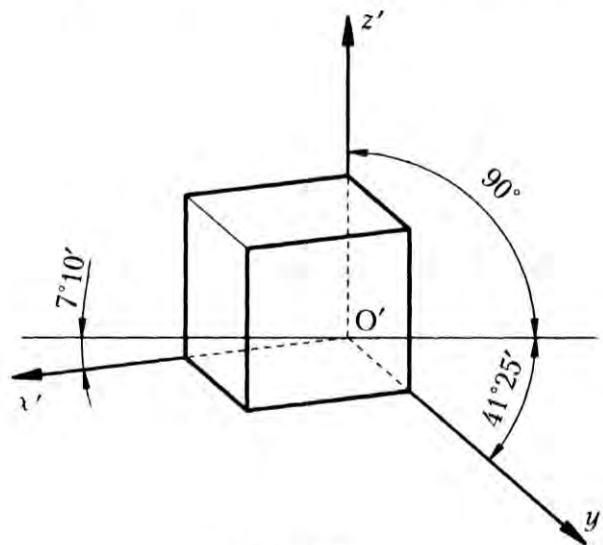


Рис. 5.3

Прямокутною аксонометричною проекцією кола, яке розташоване у площині, паралельній до будь-якого відображення площини проекцій, є еліпс. Напрямок малярної осі еліпса збігається з напрямком аксонометричної осі, перпендикулярної до площини кола (рис. 5.4).

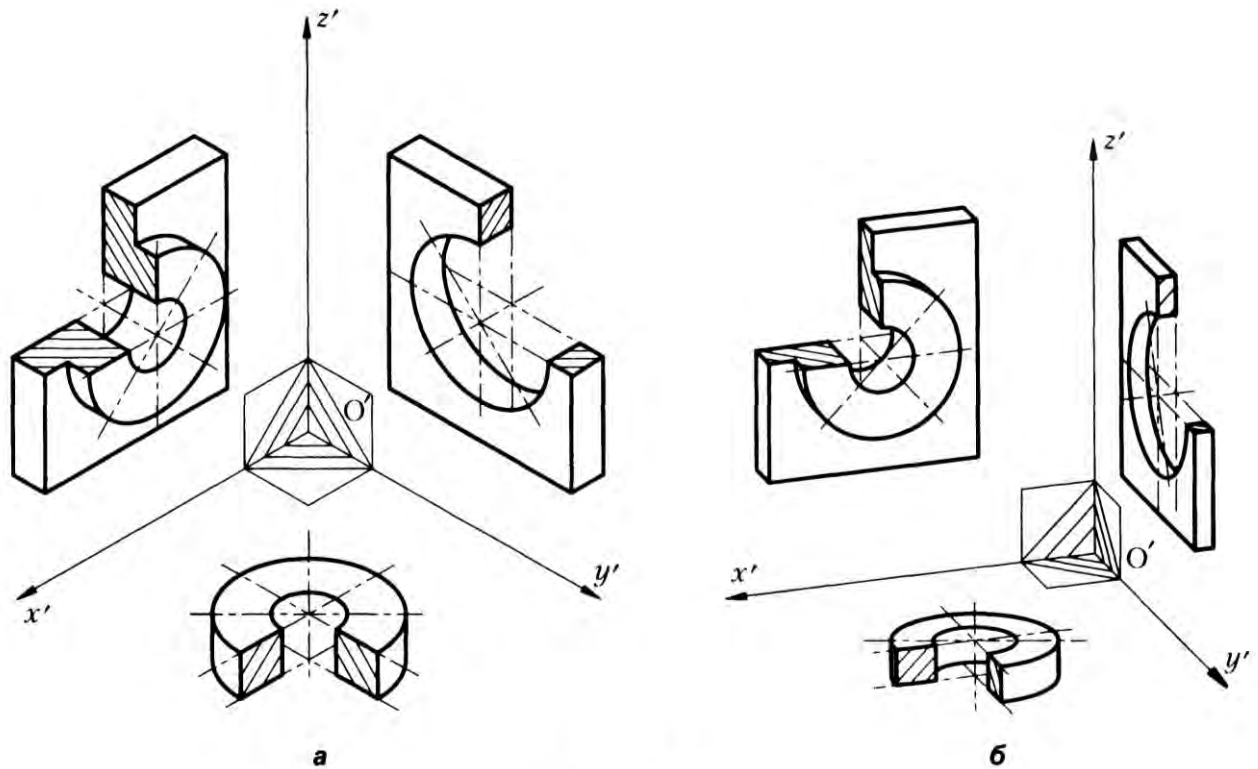


Рис. 5.4

Розміри осей еліпса такі.

- Для зведеного зображення кола в ізометрії (див. рис. 5.4, а) велика вісь дорівнює $1,22D$, мала — $0,71D$, де D — діаметр кола.
- Для зведеного зображення кола у диметрії (рис. 5.4, б) велика вісь дорівнює $1,06D$. Мала вісь еліпса в площинах, паралельних до площини $X'O'Z'$, дорівнює $0,95D$, а в площинах, паралельних до площин $X'O'Y'$ та $Z'O'Y'$, — $0,35D$.

На рис. 5.4 наведено аксонометричні кресленики деталей із циліндричними отворами, осі яких перпендикулярні до різних площин проекцій, а також приклади побудови розрізів та штрихування перерізів, паралельних до площин проекцій.

У креслениках дозволено замінювати еліпси як зображення кіл в аксонометрії овалами. Побудову таких овалів проілюстровано на рис. 5.5 (а — в ізометрії, б — у диметрії).

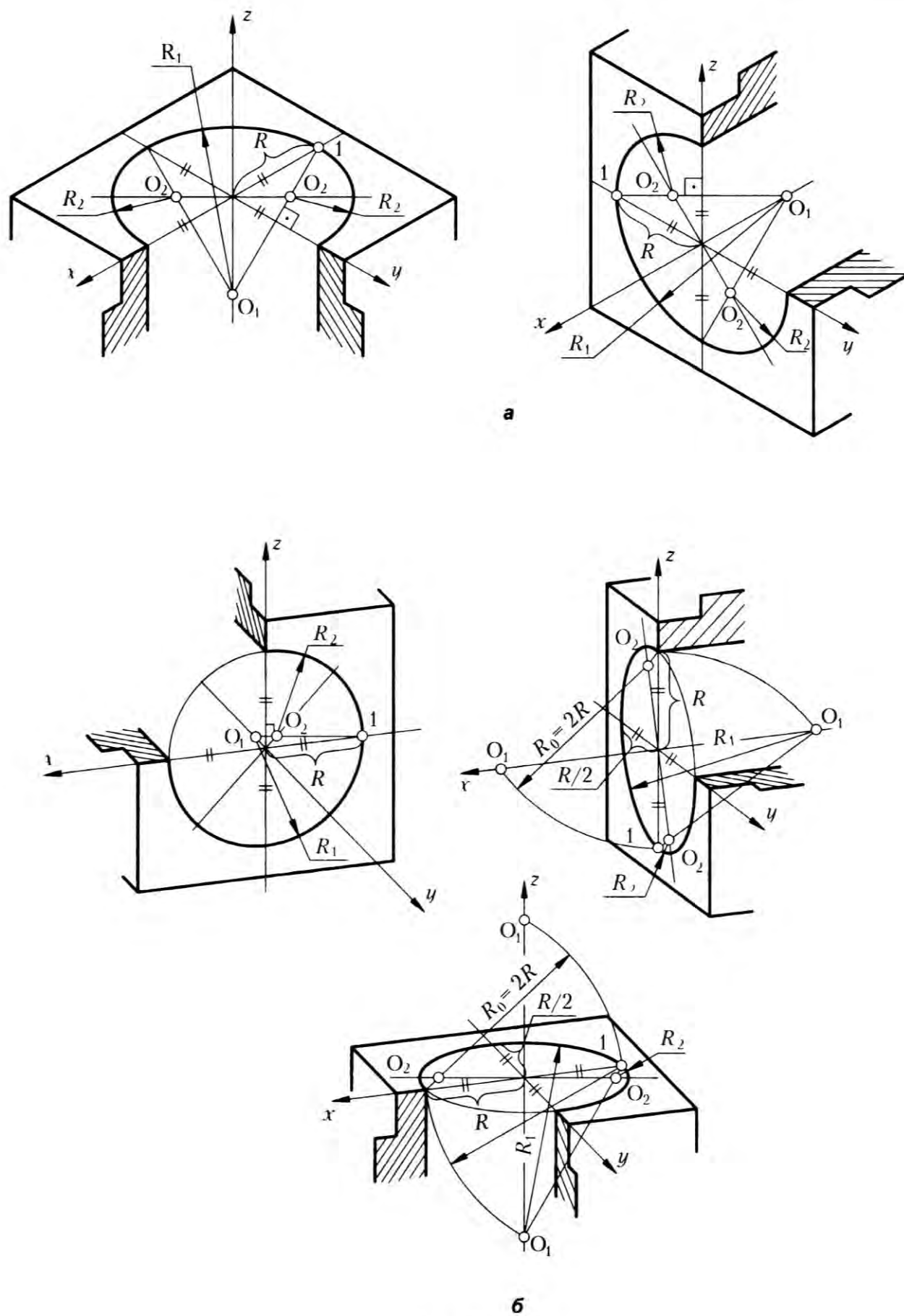


Рис. 5.5

Побудову аксонометричного креслення деталі за ортогональними проекціями виконують у такій послідовності (рис. 5.6).

1. Побудувати основу деталі.
2. Провести аксонометричні осі для всіх елементів деталі.
3. Побудувати перерізи, що утворюються у площинах розрізів на ортогональних проекціях деталі.
4. Виконати зображення елементів деталі.
5. Виконати штрихування.

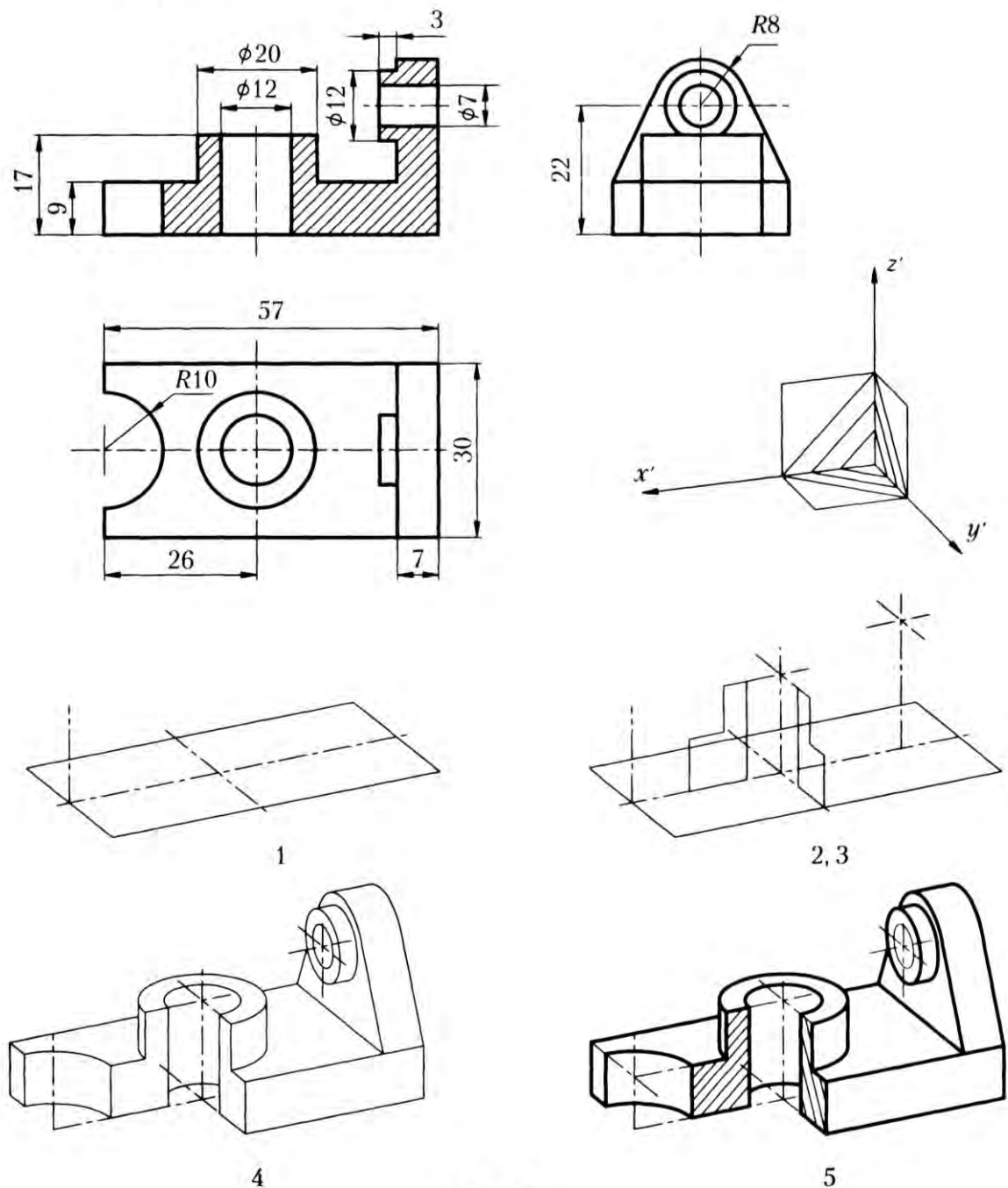


Рис. 5.6

5.2. Косокутна аксонометрія

Для косокутної аксонометрії площиною зображення обирають площину, паралельну до однієї з площин проєкцій. У цьому разі геометричні образи, що належать площинам, паралельним до обраної площини аксонометричних зображень, проєкціюються на неї без спотворень, а побудована аксонометрія має в назві позначення відповідної площини проєкцій.

На рис. 5.7 наведено схему побудови косокутних аксонометричних проєкцій: *а* – фронтальної ізометрії ($p = q = r = 1$), *б* – горизонтальної ізометрії ($p = q = r = 1$), *в* – фронтальної диметрії ($p = r = 1, q = 0,5$).

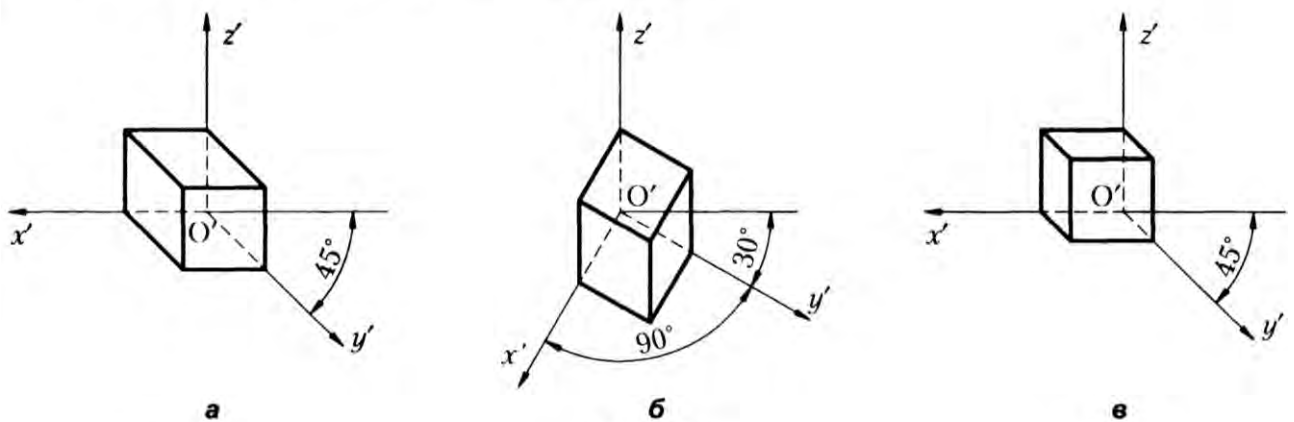


Рис. 5.7

Запитання для самоперевірки

1. У чому полягає принцип утворення аксонометричних зображень?
2. Назвіть основні типи аксонометричних проєкцій.
3. Який аксонометричний кресленик називають зведеним?
4. Яка послідовність виконання аксонометричного кресленика деталі за її ортогональними проєкціями?