МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Електронний навчальний посібник з інженерної графіки для розширеного вивчення матеріалу і методики розв'язання найбільш актуальних задач підвищеної складності

Київ
НТУУ "КПІ"
2010

Електронний навчальний посібник з інженерної графіки для розширеного вивчення матеріалу і методики розв'язання найбільш актуальних задач підвищеної складності
Уклали: О.М.Воробйов, А.Є.Ізволенська, Г.С.Подима, В.Г. Уставщиков. - К.: НТУУ "КПІ", 2010. - 157 с.

Укладачі: **О.М. Воробйов,**
А.Є. Ізволенська,
Г.С. Подима,
В.Г. Уставщиков

Відповідальний редактор **В.В.Ванін,** д.т.н., проф.,

Рецензенти **В.А. Анан`євський**, директор ВАТ "Науково-дослідного інженерінгового Центру арматуробудівництва" , к.т.н.
О.В. Лінючева, заступник декана хіміко-технологічного факультету НТУУ "КПІ", д.т.н., доцент.
П.С.Борсук директор Інституту заочного та дистанційного навчання Національного авіаційного університету, д.т.н., доцент.

За редакцією укладачів.

ВСТУП

Мета посібника - навчити студентів будувати кресленики геометричних моделей складних форм та виконувати їх перетворення.

Найбільш поширеним методом розв'язання інженерно-геометричних задач у сфері машинобудування, приладобудування, хімічної промисловості є метод ортогонального проекціювання. Незаперечними перевагами цього методу є простота побудови та можливість отримання метрики. Цей метод сприяє поглибленому дослідженню геометричних властивостей геометричних моделей та їх взаємодії.

Основними питаннями які розглянуті в посібнику щодо поглибленого вивчення інженерної графіки є:

- навчити студента досліджувати геометричні властивості елементарних геометричних образів враховуючи їх взаємодію;
- задавати геометрію найбільш поширених геометричних моделей;
- визначити числові значення параметрів геометричних моделей;
- досліджувати просторові геометричні образи складених поверхонь за їх площинними відображеннями.

Для цього в посібнику розглядаються геометричні моделі точок, прямих, площин, елементарних та складених поверхонь. Надаються приклади їх взаємодії. Значну увагу приділено визначенню метричних характеристик різних геометричних об'єктів.

Опанування студентами наведенихвідомостей та задач сприяє більш поглибленому вивченню актуальних задач інженерної графіки та розвиткупросторового мислення, яка є однією з важливих складових частин розв'язання інженерно-геометричних задач.

1.ОРТОГОНАЛЬНА ГЕОМЕТРИЧНА МОДЕЛЬ ПРОСТОРУ.

В загальному випадку три взаємоперпендикулярні площини ділять простір на вісім октантів (рис. 1.1). При вивченні інженерної графіки зазвичай виділяють перший октант, першу чверть - простір, що утво - рюється трьома площинами, які позначають Π_1, Π_2 і Π_3 з пози- тивними координатами *x, y, z*. Застосовуючи для відліку координат точки, систему знаків, що вказані на рис. 1.1 , одержимо наступну таблицю1.

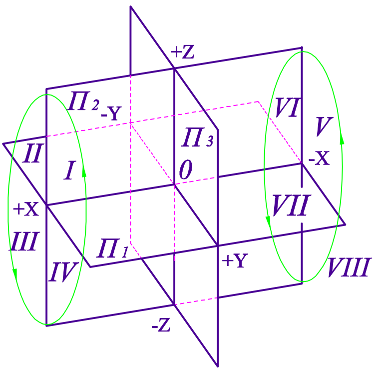


Рис 1 .1

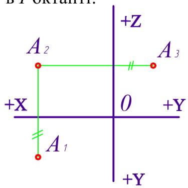
Таблиця 1.

Октант	Знаки координат			Октант	Знаки координат		
	X	Y	Z		X	Y	Z
I	+	+	+	*V*	–	+	+
II	+	–	+	*VI*	–	–	+
III	+	–	–	*VII*	–	–	–
IV	+	+	–	*VIII*	–	+	–

Розглянемо кілька прикладів на визначення октантів розташування заданої точки.

Задача 1. Побудувати три проекції точки *A*(*30; 10; 15*). Записати, в якому октанті знаходиться точка.
Відповідь: в *I* октанті.

а)



б)

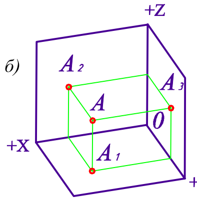
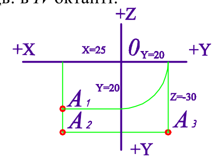


Рис. 1.2

Задача 2. Побудувати три проекції точки *A* за її координатами (*25;20;-30*). Записати, в якому октанті вона знаходиться.
Відповідь: в *IV* октанті.

а)



б)

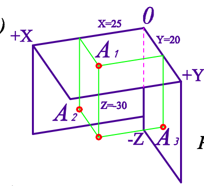
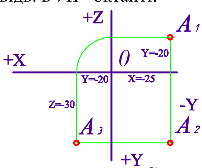


Рис. 1.3

Задача 3. Побудувати три проекції точки *A* за її координатами (*-25; -20; -30*). Записати, в якому октанті вона знаходиться.
Відповідь: в *VII* октанті.

а)



б)

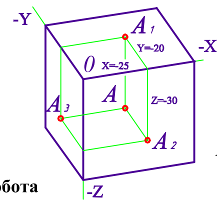
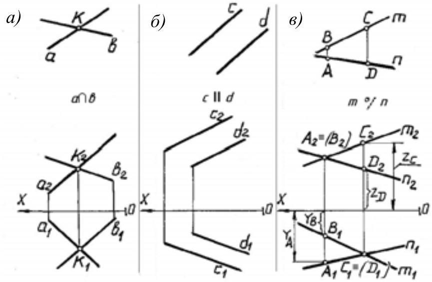


Рис. 1.4

Самостійна робота

Задача 4.
Побудувати пласку та просторову моделі заданих точок і запишить, в якому октанті вони знаходяться:
а) *B (+25; -20; 30)*
б) *C (-25; 20; -30)*

2. ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ДВОХ ПРЯМИХ



Якщо $Z_C>Z_D$, то на полі $П_1$ точка С- видима

Якщо $У_A>У_B$, то на полі $П_2$ точка *А*- видима

а)прямі перетинаються б)прямі паралельні в)прямі мимобіжні

Рис. 2.1

На рис. 2.1 на мимобіжних прямих присутні конкуруючі точки (*A* і *B* та *C* і *D*). За допомогою конкуруючих точок можна визначити взаємне розташування прямих (*m* і *n*). Точка *C* (що належить прямій *m*), яка розташована вище точки *D* (що належить прямій *n*), на $П_1$ буде над нею. Тому пряма *m*, до якої належить точка *C*, на $П_1$ буде над прямою *n*, тобто видима. Аналогічна ситуація для точок *A* і *B* стосовно площини проекції $П_2$ (точка *A* розташована перед точкою *B*, а *n* перед *m*)(рис. 2.1).

.

Питання та відповіді:

1. Як називається пряма, яка має наступні координати точок: *A*(25;7;15) і *B*(9;7;0)?

Відповідь: координати $y_A = y_B$, тобто проекція прямої в $П_1$ (A_1B_1) розташовується паралельно осі *Ox*, а проекція цієї прямої в $П_2$ - від кутом до осі *Ox*. Така пряма має назву прямої рівня і називається: фронталь *f* рис. 2.2.

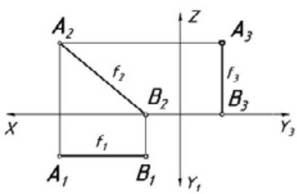


Рис. 2.2

2. Яку назву має пряма, у якої такі значення кутів нахилу до площин проекцій:

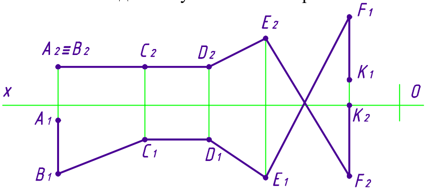
а) $\alpha = 0°$; $z_A = z_B$.

Відповідь: це - горизонталь (*h*)

б) $\alpha = 90$; $\beta = 0°$; $\gamma = 0°$.

Відповідь: це - горизонтально-проекцююча пряма.

3. Визначити довжину ламаної лінії рис. 2.3.



α_{EF}=_____

β_{EF}=_____

α_{FK}=_____

β_{FK}=_____

Рис.2.3

Відповідь: розбиваємо ламану лінію на окремі відрізки *AB*, *BC*, *CD*, *DE,EF,FK* і розглядаємо кожен відрізок окремо, тобто визначаємо їх розташування у просторі відносно площин проекцій. Відрізок *AB* - фронтально-проекцююча пряма. Її натуральна величина в $П_1$ (A_1B_1). Відрізок *BC* - пряма рівня - горизонталь. Натуральна величина в $П_1$ (B_1C_1). Відрізок *CD* - профільно-проекцююча пряма. Її натуральна величина в $П_1$ і в $П_2$ ($C_1D_1 = C_2D_2$). Відрізок *DE* - пряма загального положення. Її натуральну величину визначаємо за допомогою метода перетворення площин проекцій. (рис. 2.4 *а* ,*б*).

а) б)

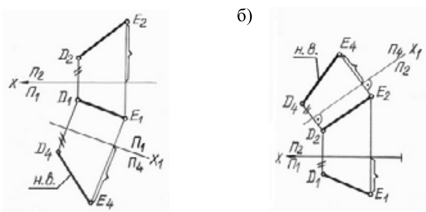


Рис. 2.4

Закінчіть самостійно роз`вязання задачі методом заміни площин проекцій, тобто визначіть натуральну величину прямої EF і KF. Сума натуральних величин всіх відрізків і буде довжиною всієї ламаної лінії.

Визначіть кути α *і* β прямих EF і FK.

3. Визначити взаємне розташування відрізків прямих *BC* і *DE* ламаної лінії *ABCDE*(рис. 2.5 *а)*.

Відповідь: прямі мимобіжні (рис. 2.5 *б*).

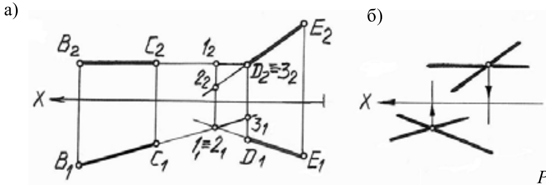


Рис.2.5

4. Через точку *C* провести пряму *b* паралельну прямій *a* (рис. 2.6 *а)*.

Відповідь: $C \in b$; $b \parallel a$ ($b_1 \parallel a_1$; $b_2 \parallel a_2$) (рис. 2.6 *б)*.

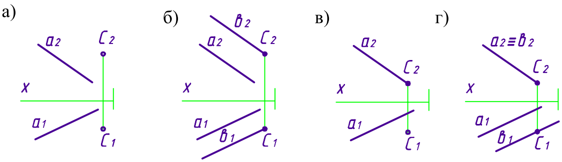


Рис.2.6

6. Як розташовані точки відносно прямої *l* (вище, нижче, перед або за прямою, знаходяться на прямій) (див. рис. 2.7, а)

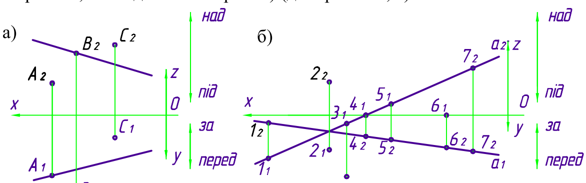


Рис. 2.7

Відповідь: $D \in l$, *C* - над і за прямою *l*, *B* - перед прямою *l*, *A* - під прямою *l*.

Самостійно визначти розтошування точок 1-7 відносно прямої *a (* Рис 27 *б*)

3. ПЛОЩИНА

3.1 Основні положення

Визначником площини називається сукупність геометричних елементів, які однозначно визначають її положення в просторі. Визначник записують літерами у дужках після познаки площини (рис. 3.1.1).

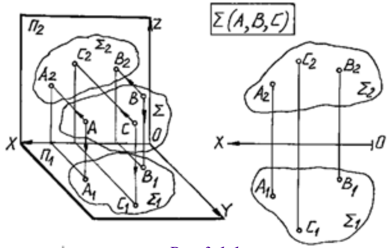


Рис.3.1.1

Засоби завдань площин

1. Трьома точками, що не лежать на одній прямій (рис. 3.1.1).
2. Плоскою фігурою (рис.3.1.2).
3. Прямою і точкою, що не належить цій прямій (рис.3.1.3).
4. Двома паралельними прямими (рис.3.1.4)
5. Двома прямими, що перетинаються.
а) m і n - загального положення(рис.3.1.5).
б) двома прямими рівня, що перетинаються(рис.3.1.6).
6. Слідом-проекцією, якщо площина проекцююча (рис.3.1.7) чи рівня (рис. 3.1.8).

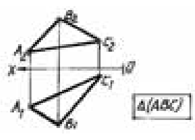


Рис. 3.1.2

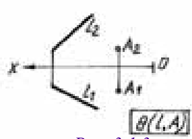


Рис. 3.1.3

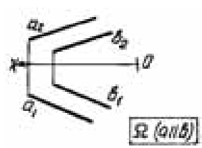
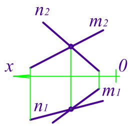
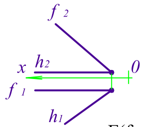


Рис. 3.1.4



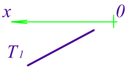
$Q(m \cap n)$

Рис. 3.1.5



$\Gamma(f \cap h)$

Рис. 3.1.6

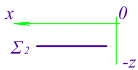


$T(T_1) \perp \Pi_1$

Рис. 3.1.7

$\Sigma(\Sigma_2) \parallel \Pi_1$

Рис. 3.1.8



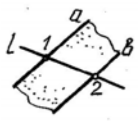
$\Sigma(\Sigma_2) \parallel \Pi_1$

Рис. 3.1.8

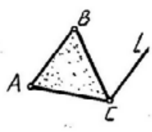
3.2 Властивості належності точки і прямої до площини

Пряма належить площині, якщо вона проходить через дві точки, що належать даній площині (рис. 3.2.1 а) (окремий випадок, коли пряма проходить через точку, що належить даній площині, паралельно прямій, яка лежить у цій площині - рис.3.2.1 б).
Точка належить даній площині, якщо вона належить прямій, що належить даній площині (рис.3.2.1 в).

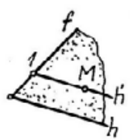
а) $\Gamma(a \parallel в)$



б) $\Sigma(\Delta ABC)$



в) $\Delta(h \cap f)$



$l \cap a=1$
$l \cap в=2$
$l \cap \Gamma(a \parallel в)$

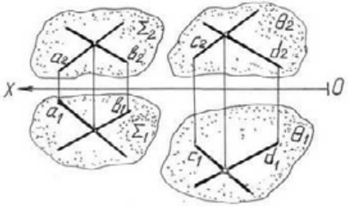
$l \parallel AB$
$C \in l$
$l \in \Sigma(\Delta ABC)$

$\Delta(h \cap f)$
$M \in h'$
$h' \parallel h;\ h' \cap f=1$

Рис.3.2.1

3.3 Взаємне положення площин

Площини загального положення паралельні, якщо дві прямі, що перетинаються, однієї площини паралельні двом прямим, що перетинаються другої площини (рис. 3.3.1).

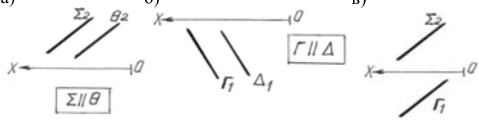


$\Sigma(a \cap в)$
$\Theta(c \cap d)$
$a \parallel c$; $в \parallel d$
$\Sigma \parallel \Theta$

Рис. 3.3.1

Площини окремого положення паралельні, якщо паралельні їх однойменні сліди проекцій (рис.3.3.2).

а) б) в)



Примітка: площини $\Sigma(\Sigma_2)$ і $\Gamma(\Gamma_1)$ не паралельні між собою

Рис. 3.3.2

3.4 Лінії рівня (h і f) в площинах
Горизонталі в площинах

а)$\Sigma(a \parallel b)$; $h \subset \Sigma$ б)$\Theta(l;T)$; $h \subset \Theta$ в)$Q(l \cap m)$; $h \subset Q$; $h' \subset Q$ г) $\Delta(\Delta_2) \perp \Pi_2$; $h^\circ \subset \Delta$; $h' \subset \Delta$;

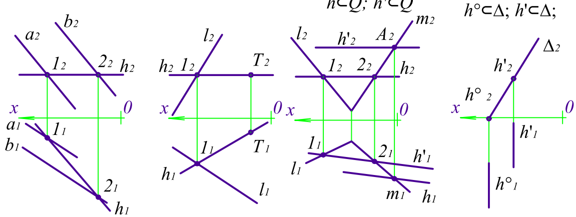


Рис.3.4.1

3.5 Фронталі в площинах.

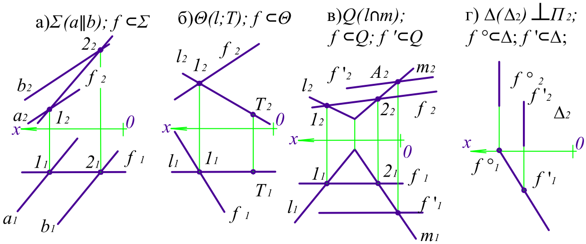
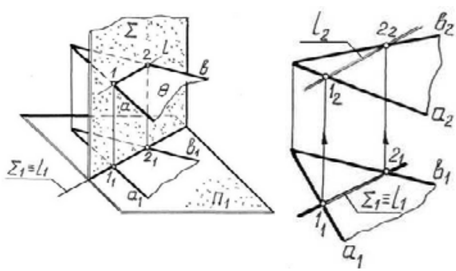


Рис. 3.5.1

3.6 Приклад перетину площини загального положення з площиною окремого положення.

Побудова лінії перетину площин окремого $\Sigma(\Sigma_1)$ і загального $\Theta(a \cup b)$ положень (рис. 3.6.1).



$1_1 = \Sigma_1 \cap a_1$
$2_1 = \Sigma_1 \cap b_1$
$1_2 \subset a_2$
$2_2 \subset b_2$
$1_2 \cup 2_2 = l_2$

Рис. 3.6.1.

3.7. Перетворення площини загального положення в проекцюючу

Приклад 1. Перетворити площину загального положення $\Sigma\ (m \cap n)$ в проекцюючу за допомогою горизонталі h площини Σ (рис. 3.7.1).

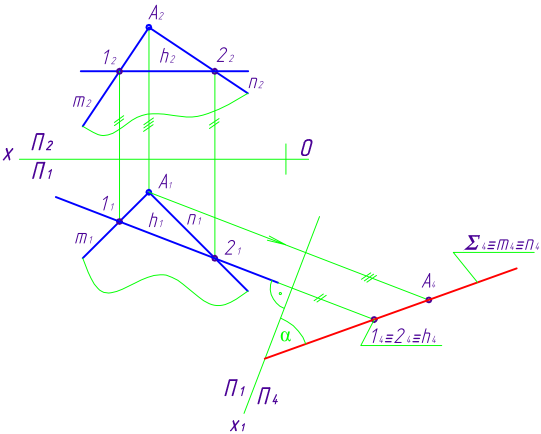


Рис. 3.7.1

Алгоритм розв`язання:

1. Провести в площині Σ довільну горизонталь: $h_2 \parallel Ox$; h_1 будується за двома точками (на рис. 3.7.1 - за проекціями 1_1 , 2_1).

2. Систему площин проекцій Π_1 / Π_2 перетворити на нову Π_1 / Π_4 , в якій $\Sigma(\Sigma_4) \perp \Pi_4$. Для цього достатньо, щоб горизонталь h площини була перпендикулярна до Π_4 . Умова виконується, якщо $x_1 \perp h_1$.

На площині Π_4 спочатку будують проекцію горизонталі h ($h_4 \equiv 1_4 \equiv 2_4$). Потім будують проекцію довільної точки площини Σ (на рис. 3.7.1 - проекція A_4 точки A).

Слід-проекція Σ_4 площини проводиться через проекції h_4 і A_4. В даному перетворенні визначається кут $\alpha°$ нахилу площини Σ до площини проекцій Π_1. Це кут між слідом-проекцією площини $\Sigma(\Sigma_4)$ і віссю x_1 .

Приклад 2. Перетворити площину загального положення Σ $(m \cap n)$ у проекцюючу за допомогою фронталі f площини (рис. 3.7.2).

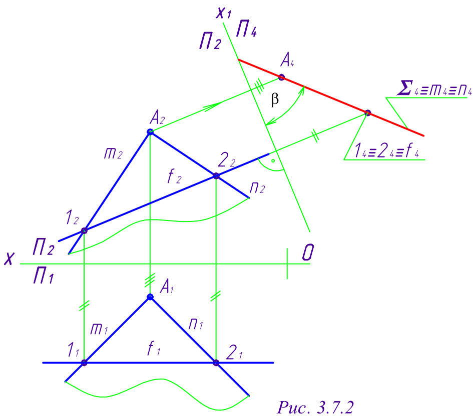


Рис. 3.7.2

Алгоритм розв`язання:

1. Провести в площині Σ довільну фронталь f: $f_1 \parallel Ox$, f_2 проводиться через проекції 1_2 і 2_2 точок 1 і 2 площини.
2. Перетворити систему площин проекцій Π_1/Π_2 на систему Π_2/Π_4, в якій $\Sigma \perp \Pi_4$. Це забезпечується тим, що $x_1 \perp f_2$. На площині Π_4 будують спочатку проекцію f_4 фронталі f, яка буде точкою (точки 1_4 і 2_4 збігаються). Потім - проекції довільної точки площини, наприклад точки A.

Слід-проекція Σ_4 площини Σ проводиться через f_4 і A_4. Кут $\beta°$ між слідом-проекцією Σ_4 і віссю x_1 є кутом нахилу площини Σ до площини проекцій Π_2.

3.8 Перетворення площини загального положення в площину рівня

Цим перетворенням користуються для визначення натуральної величини плоскої фігури, наприклад трикутника ABC (рис. 3.8.1,3.8.2). Спочатку від системи площин проекцій Π_1/Π_2 переходять до системи Π_1/Π_4, в якій площина трикутника ABC перпендикулярна до Π_4 $(x_1 \perp h_1)$, і будують її слід-проекцію $A_4B_4C_4$. Потім систему проекцій Π_1/Π_4 перетворюють на систему Π_4/Π_5, в якій площина Π_5 є паралельною до площини трикутника. Для цього проводять нову вісь проекцій $x_2 \parallel A_4B_4C_4$.

Будують проекції $A_5B_5C_5$ на площині Π_5. Сполучають побудовані проекції точок прямими лініми в трикутник, який і буде шуканою натуральною величиною оригіналу ABC.

1. $h \subset \Sigma(ABC)$; $C \in h$; $1 = h \cap AB$
2. $x \to x_1$; $\Pi_4 \perp \Pi_1$;
 $\Pi_4 \perp h$; $(x_1 \perp h_1)$; $\Sigma\ (\Sigma_4) \perp \Pi_4$;
 α=кут нахилу $\Delta\, ABC$ до Π_1;
 $A_4C_4B_4$ - пряма - слід-проекція площини Σ
3. $x_1 \to x_2$; $\Pi_5 \perp \Pi_4$;
4. $\Pi_5 \parallel \Sigma(\Sigma_4)$; $A_5B_5C_5$ - н.в.

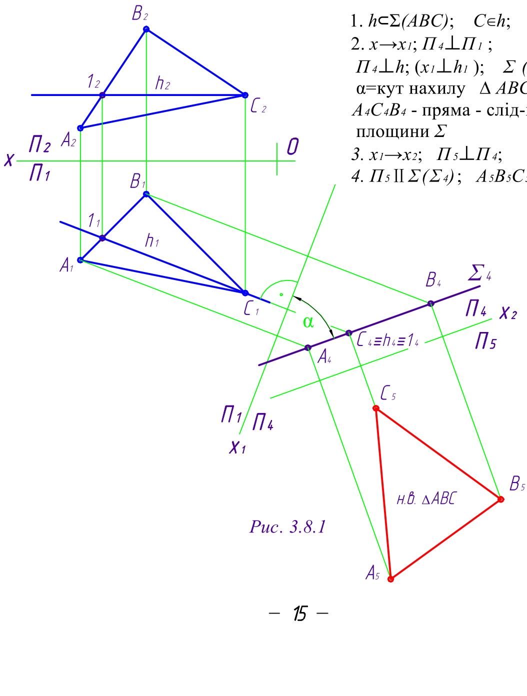


Рис. 3.8.1

1. $f \subset \Theta(ABC)$; $A \in f$; $1 = f \cap BC$
2. $x \to x_1$; $\Pi_4 \perp f$; $\Pi_4 \perp \Pi_2$;
$(x_1 \perp f_2)$; $\Sigma\ (\Sigma_4) \perp \Pi_4$;
β=кут нахилу ($\Delta\ ABC$) до Π_2;
$A_4C_4B_4$ - пряма -
слід-проекція площини Σ
3. $x_1 \to x_2$; $\Pi_5 \perp \Pi_4$;
$\Pi_5 \parallel \Sigma(\Sigma_4)$;
$A_5B_5C_5$ - н.в.

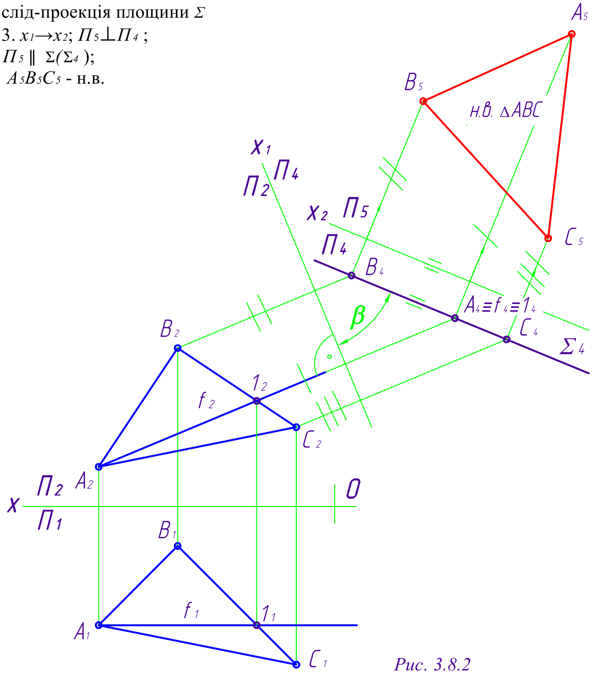


Рис. 3.8.2

3.9 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Побудувати рівнобедрену трапецію *ABCD,* яка належить площині *Σ(h∩AD)*.
AD - нижня основа, *B* - одна з вершин (рис. 3.9.1). Координати точок: *A* (42; 22; 0), *B* (30; 30; 20); *D* (8; 3; 20). Як розміщені дані точки у просторі відносно площин проекцій ?

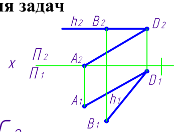


Рис. 3.9.1

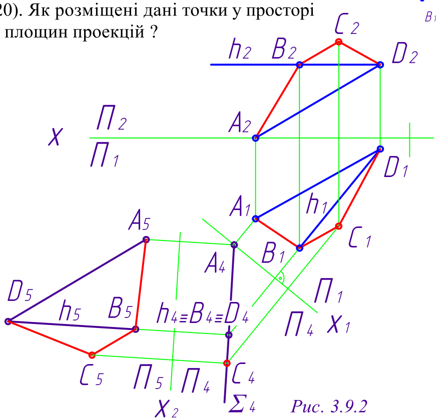


Рис. 3.9.2

Розв'язання

За заданими координатами будуємо проекції точок *A*, *B*, *D* в площинах проекцій $П_2$ і $П_1$. Точки *B* і *D* - просторові. Точка $A \in П_1$ (рис. 3.9.2).

З'єднуємо однойменні проекції точок (рис.3.9.2). Відрізок *BD* є горизонталлю.

Розв`язуємо задачу методом заміни площин проекцій. Першою заміною

$$x\frac{П_2}{П_1} \rightarrow x_1\frac{П_1}{П_4}$$

площина *Σ* (*BD* ∩ *AD)*, перетворюється у проекцюючу. Другою заміною

$$x_1\frac{П_1}{П_4} \rightarrow x_2\frac{П_4}{П_5}$$

площину *Σ* перетворюємо в площину рівня, тобто в натуральну величину. Таким чином отримуємо натуральну величину сторони нижньої основи рівнобічної трапеції та, маючи також точку *B* - одну з вершин верхньої основи цієї трапеції, добудовуємо точку *C*. Проекцюємо точку *C* в $П_1$ та $П_2$ і з'єднуємо з проекціями точок *A* і *D*.

Задача 2.

Дано: a (a_1; a_2); точка 1 належить a, яка включає точку B. Визначники точок 1 (55; 28; 14); B(36; 8; 7); C(5; 25; 24); D(27; ?; 41); E(30; ?; 25); AB=20 мм;
AF=30 мм; $A \in a$; $EF \parallel AB$.

1. Побудувати за допомогою заміни площин проекцій D_1; E_1; $F(F_1;F_2)$ площини $\Sigma(ABCDEF)$.
2. Визначити натуральну величину заданої плоскої фігури $\Sigma(ABCDEF)$ і кут нахилу її до Π_2.

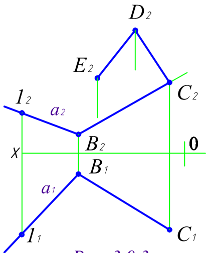


Рис. 3.9.3

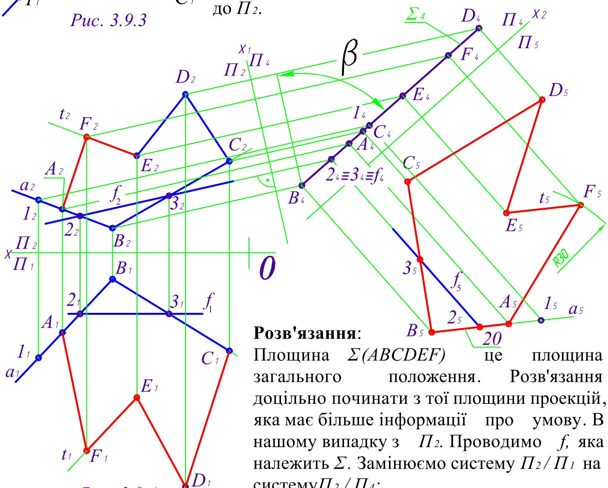


Рис. 3.9.4

Розв'язання:

Площина $\Sigma(ABCDEF)$ це площина загального положення. Розв'язання доцільно починати з тої площини проекцій, яка має більше інформації про умову. В нашому випадку з Π_2. Проводимо f, яка належить Σ. Замінюємо систему Π_2 / Π_1 на системуΠ_2 / Π_4;

$x\frac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow x_1\frac{\Pi_2}{\Pi_4}$ $\Pi_4 \perp \Pi_2$; $\Pi_4 \perp \Sigma$;$x_1 \| f(f_2)$;

В системі Π_2 / Π_4 площина $\Sigma(ABCDEF)$ - проекцююча. Тобто проекції всіх точок A, B, C, D, E (і F пізніше) площини Σ спроекцюються на "одну пряму" - слід-проекцію площини $\Sigma(\Sigma_4)$. В Π_4 одержуємо координати y точок D, E. Будуємо точки D і E на Π_1. Другою заміною знаходимо натуральну величину Σ
і кінчаємо побудову на Π_2 іΠ_1. $x_1\frac{\Pi_2}{\Pi_4} \rightarrow x_2\frac{\Pi_4}{\Pi_5}$ $\Pi_5 \perp \Pi_4$; $\Pi_5 \| \Sigma$; $x_2 \| \Sigma(\Sigma_4)$.

Задача 3.

Дано: Визначники точок: *1*(55; 20; 14); *2* (4; 30; 14); *C* (17; 15; ?). Побудувати: методом заміни в площині Σ (1-2; *C*) квадрат з діагоналлю 40 мм (рис. 3.9.5).

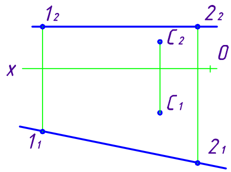


Рис. 3.9.5

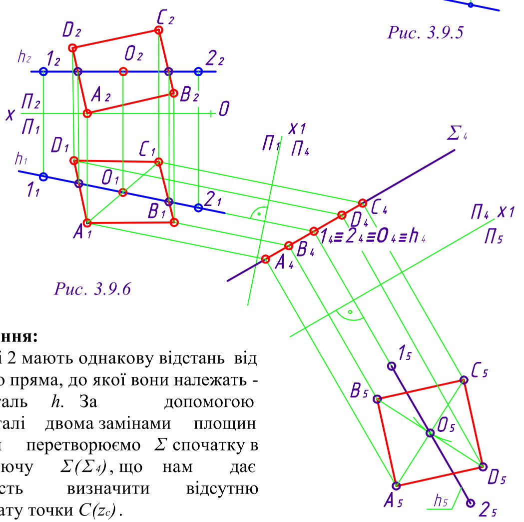


Рис. 3.9.6

Розв'язання:

Точки 1 і 2 мають однакову відстань від Π_1, тобто пряма, до якої вони належать - горизонталь *h.* За допомогою горизонталі двома замінами площин проекцій перетворюємо Σ спочатку в проекцюючу $\Sigma(\Sigma_4)$, що нам дає можливість визначити відсутню координату точки $C(z_c)$.

А другою заміною перетворюємо площину Σ в площину рівня**.** На Π_5 площина Σ спроекціювалася в натуральну величину,

$$x\frac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow x_1\frac{\Pi_1}{\Pi_4};\ \Pi_4 \perp \Pi_1;\ \Pi_4 \perp \Sigma;\ x_1 \perp h(h_1);$$

$$C_1 \rightarrow C_4;\ C_4 \in \Sigma_4;\ C_1 \rightarrow C_2$$

$$x_1\frac{\Pi_1}{\Pi_4} \rightarrow x_2\frac{\Pi_4}{\Pi_5};\ \Pi_5 \perp \Pi_4;\ \Pi_5 \| \Sigma;\ x_2 \| \Sigma(\Sigma_4);$$

Закінчуємо задачу побудовою проекцій квадрата в Π_1 і Π_2 (рис. 3.9.6).

Задача 4

Побудувати ромб за його діагоналлю BD і горизонтальною проекцією точки A. В якому октанті знаходиться точка C (рис. 3.9.7)?

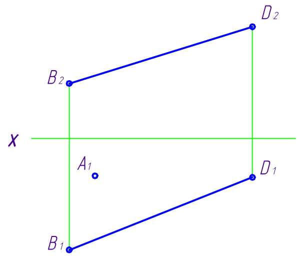


Рис. 3.9.7

Розв'язання

1. Методом заміни площин проекцій знаходимо натуральну величину діаногалі BD:

$$x\frac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow x_1\frac{\Pi_1}{\Pi_4} \quad \Pi_4 \perp \Pi_1;\ \Pi_4 \parallel BD;\ x_1 \parallel BD(B_1D_1).$$

2. Натуральну величину діагоналі ромба B_4D_4 ділимо навпіл (проводимо серединний перпендикуляр, оскільки діагоналі у ромба перпендикулярні між собою). Проекцюємо точку A з Π_1 на Π_4 на серединний перпендикуляр r_4 і таким чином отримуємо її проекцію точки A в Π_4. Симетрично будуємо C_4. З'єднуємо $A_4B_4C_4D_4$ - це буде натуральна величина шуканого ромба. Знаючи проекцію точки A в Π_4 можемо побудувати її проекцію в Π_2. Точка K - точка перетину діагоналей ромба. За її допомогою добудовуємо точку C в Π_1 і Π_2. Ця точка буде знаходитись у четвертому октанті (рис. 3.9.8).

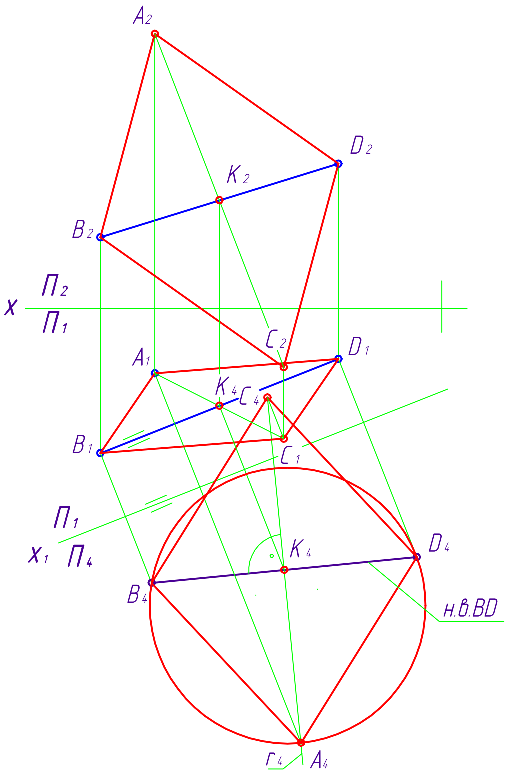


Рис. 3.9.8

Задача 5. В площині $\Gamma(f \cap h)$ побудувати равносторонній трикутник $\Delta(ABC)$ (рис. 3.9.9).

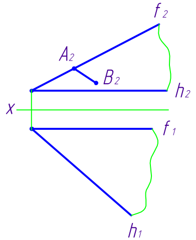


Рис. 3.9.9

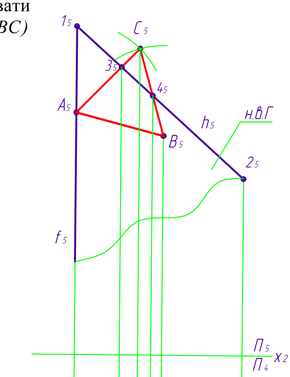
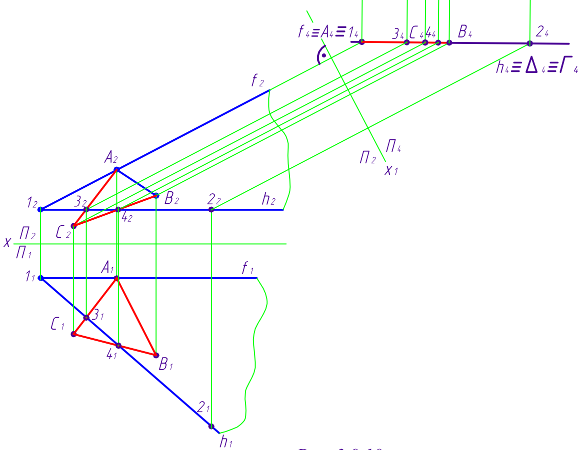



Рис. 3.9.10

Розв'язання. Позначаємо точку перетину горизонталі та фронталі - точкою 1. Точка 2 належить горизонталі (довільна точка). Задачу розв'язуємо методом заміни площин проекцій $x\frac{\Pi_2}{\Pi_1} \to x_1\frac{\Pi_4}{\Pi_2}$, лишаючи ту площину проекцій, яка містить більше інформації цієї задачі. Таким чином, в системі площин $\frac{\Pi_2}{\Pi_4}$ одержуємо площину Γ проеціюючою. Точка B належить площині Γ, будуємо її проекцію B_4. За допомогою другої заміни $x_1\frac{\Pi_4}{\Pi_2} \to x_2\frac{\Pi_5}{\Pi_4}$ одержуємо в системі $\frac{\Pi_5}{\Pi_4}$ площину Γ, перетворену на площину рівня. Тобто на площину Π_5 площина Γ спроеціювалася в натуральну величину. Будуємо B_5 використовуючи відому нам її проекцію в Π_2. Добудовуємо проекцію точки C в Π_5, користуючись циркулем. З'єднавши т. C з A і B одержуємо в Π_5 натуральну величину рівностороннього трикутника $A_5B_5C_5$.
Добудовуючи проекції одержаного $\Delta(ABC)$ в Π_2 і Π_1 будують точки 3 і 4 розташовані на горизонталі. На Π_1 будуємо і проекції точок A і B. Робимо це за допомогою їх проекцій в площині проекцій Π_4.

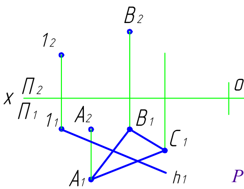


Рис. 3.9.11

Задача 6. Побудувати фронтальну проекцію $\Delta(ABC)$, що належить площині $\boldsymbol{\Sigma}(B, h)$ і знайти його натуральну величину і центр вписаного кола. Задачу розв'язати методом заміни площин проекцій (рис. 3.9.11).

Розв'язання. Першою заміною $x\frac{\Pi_2}{\Pi_1} \to x_1\frac{\Pi_1}{\Pi_4}$ перетворюємо площину $\Delta(ABC)$, яка належить $\boldsymbol{\Sigma}$ у проекцюючу, користуючись горизонталлю h площини $\boldsymbol{\Sigma}(B, h)$.

$$x\frac{\Pi_2}{\Pi_1} \to x_1\frac{\Pi_1}{\Pi_4};\ \Pi_4\perp\Pi_1;\ \ \Pi_4\perp h(h_1);\ (x_1\perp h_1)$$

Переносимо в Π_4 точку B, як точку, що належить площині $\boldsymbol{\Sigma}$ і одержуємо B_4. З'єднавши B_4 і h_4 отримуємо слід-проекцію площини $\boldsymbol{\Sigma}$, в якій лежить наш трикутник ABC. Знаючи, що точка A належить трикутнику ABC, проекцюємо її з Π_1 на Π_4 на слід - проекцію площини $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\Sigma_4})$: $A_1\to A_4$. Точка A має від'ємну координату z. Враховуючи це, переносимо точку A в Π_2 і з'єднуємо на Π_2 одержані точки в трикутник.
Другою заміною $x_1\frac{\Pi_1}{\Pi_4} \to x_2\frac{\Pi_4}{\Pi_5}$ знаходимо натуральну величину

$\Delta(ABC)$: $\Delta_5(A_5B_5C_5)$. Тепер можемо знайти центр вписаного кола (на перетині бісектрис в $\Delta(ABC)$): O_5. Будуємо проекції центра $O(O_1, O_2)$ в Π_1 і Π_2.

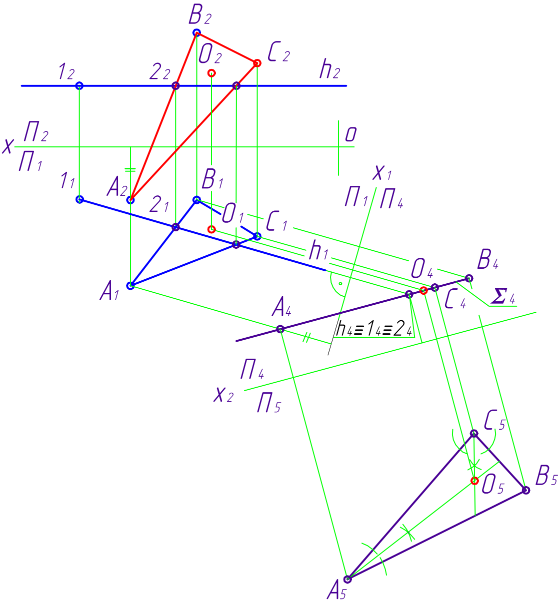

B2
C2
O2
12
22
h2
x
П2
П1
0
11
A2
B1
21
O1
C1
X1
П1
П4
h1
O4
B4
C4
Σ4
A1
A4
h4≡14≡24
П4
X2
П5
C5
O5
B5
A5

Рис. 3.9.12

Задача 7.

Побудувати проекції прямокутного трикутника $\Delta(ABC)$, який належить площині $\boldsymbol{\Sigma}(AB\cap h)$. AB - катет трикутника; вершина C належить горизонталі $h(C\in h)$. Визначити натуральну величину висоти $\Delta(ABC)$, проведеної до гіпотенузи з точки A. Позначити висоту токами A, M. Побудувати проекції висоти AM на Π_1 і Π_2 (рис. 3.9.13).

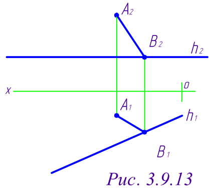


Рис. 3.9.13

Розв'язання.

За допомогою метода заміни площин проекцій перетворюємо площину $\boldsymbol{\Sigma}(AB\cap h)$ в проекцюючу:

$$x\frac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow x_1\frac{\Pi_1}{\Pi_4};\ \Pi_4\perp\Pi_1;\ \Pi_4\perp h(h_1);\ (x_1\perp h_1)$$

В площині проекцій Π_4 отримуємо слід-проекцію площини $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\Sigma}_4)$. Другою заміною $x_1\frac{\Pi_1}{\Pi_4} \rightarrow x_2\frac{\Pi_4}{\Pi_5}$ перетворюємо площину $\boldsymbol{\Sigma}$ в площину рівня, тобто отримуємо її натуральну величину в Π_5. Щоб побудувати точку C, яка належить горизонталі h (за умовою задачі), будуємо горизонталь в Π_5. Катет AB також переносимо в Π_5. Через A_5 проводимо проекцію прямої $t(t_5)$ перпендикулярно до A_5B_5 ($\angle A=90°$). У точці перетину прямої t і горизонталі h одержуємо шукану точку $C(C_5)$- вершину трикутника. Будуємо проекції точки C в Π_4, Π_1, Π_2. Висотою трикутника ABC є відрізок AM (рис. 3.9.14).

$$x_1\frac{\Pi_1}{\Pi_4} \rightarrow x_2\frac{\Pi_5}{\Pi_4};\ \Pi_5\perp\Pi_4;\ \Pi_5\parallel\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\Sigma}_4);\ x_2\parallel\boldsymbol{\Sigma}_4.$$

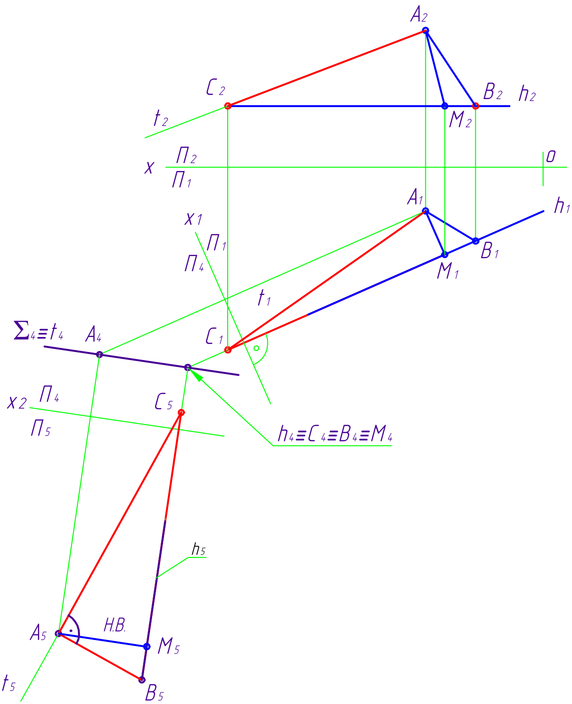

A2
C 2
B2
h2
t2
M2
x
П2
П1
o
A1
h1
x1
П1
П4
B1
M1
t1
Σ4≡t4
A4
C1
x2
П4
П5
C5
h4≡C4≡B4≡M4
h5
H.B.
A5
M5
t5
B5

Рис. 3.9.14

Задача 8.

Побудувати квадрат *ABCD* зі стороною, яка дорівнює мінімальній відстані між прямими *a* і *b*; *AD* належить прямій *a*; вершина *C* належить прямій *b,*якщо 1(65;40;20), 2(42;30;31), 3(30;46;7), 4(6;41;40) (рис. 3.9.15).

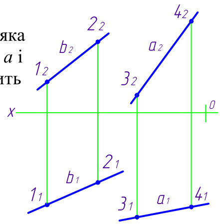


Рис. 3.9.15

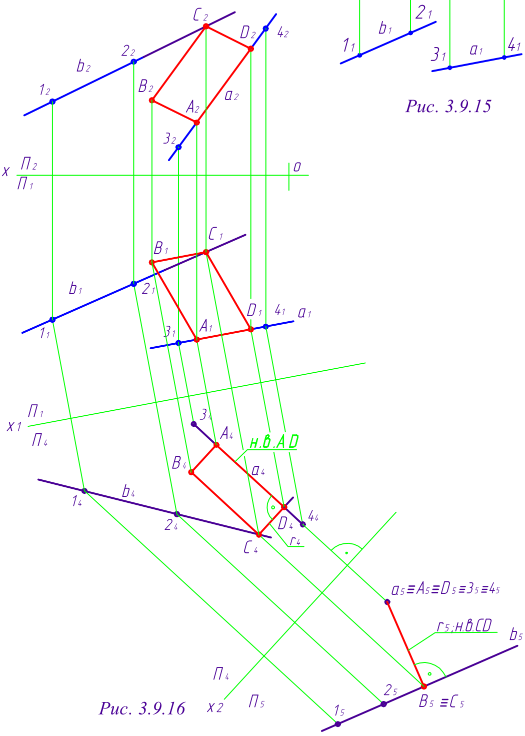


Рис. 3.9.16

Розв'язання

Одну із заданих прямих a або b перетворюємо у проекцюючу. Оскільки прямі a і b - загального положення, треба виконати дві заміни площин проекцій:

1 заміна: ; $x\frac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow x_1\frac{\Pi_1}{\Pi_4}$ $\Pi_4 \| a_1$; $\Pi_4 \perp \Pi_1$; $(x_1 \| a_1)$;

В системі $x_1\frac{\Pi_1}{\Pi_4}$ пряма a є прямою рівня, тобто в Π_4 маємо її н.в.

2 заміна: $x_1\frac{\Pi_1}{\Pi_4} \rightarrow x_2\frac{\Pi_4}{\Pi_5}$ $\Pi_5 \perp a$; $\Pi_5 \perp \Pi_4$; $(x_2 \perp a_4)$;

В системі $x_2\frac{\Pi_4}{\Pi_5}$ пряма a - проекцююча.

На площину Π_5 пряма a спроекціювалася в точку. Найкоротша відстань від точки до прямої - це перпендикуляр. Проводимо перпендикуляр $r(r_5)$ з a_5 до b_5:

$r_5 \cap b_5 = C_5$

C_5D_5 - і є найкоротшою відстанню між a і b. В $\Pi_4 \rightarrow r_4 \perp a_4$; $r_4 \cap a_4 \Rightarrow D_4$; $A_4D_4 = C_5D_5$; $A_4B_4 \| D_4C_4$; $B_4C_4 \| A_4D_4$. Будуємо проекції квадрата ABCD в Π_1 і Π_2 (рис. 3.9.16).

Задача 8 *а.*

Побудувати правильну піраміду $SABC$. Основа піраміди - квадрат зі стороною, яка дорівнює мінімальній відстані між прямими a і b; AD належить прямій a; вершина C належить прямій b. Висота піраміди дорівнює 30 мм, якщо 1(65; 40; 20), 2(42; 30; 31), 3(30; 46; 7), 4(6; 41; 40) (рис. 3.9.17).

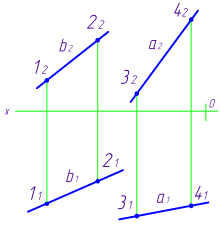


Рис.3.9.17

Розв'язання 8 а.

Починаємо вирішувати цю задачу, як попередню. Потім будуємо висоту піраміди SO . Починаємо з площини проекцій $П_5$. $A_5O_5 = O_5B_5$; З O_5 проводимо перпендикуляр r'_5 і на ньому відкладаємо задану висоту SO = 30 мм (S_5O_5). Якщо S_5O_5 - натуральна величина SO (S_4O_4) знаходиться в точці перетину діагоналей основи (O_4). Далі задача розв'язується за допомогою точного переносу проекцій точок - вершин піраміди в $П_1$ і $П_2$. (рис. 3.9.18)

На рис. 3.9.19 приведено два приклада побудови цієї задачі.

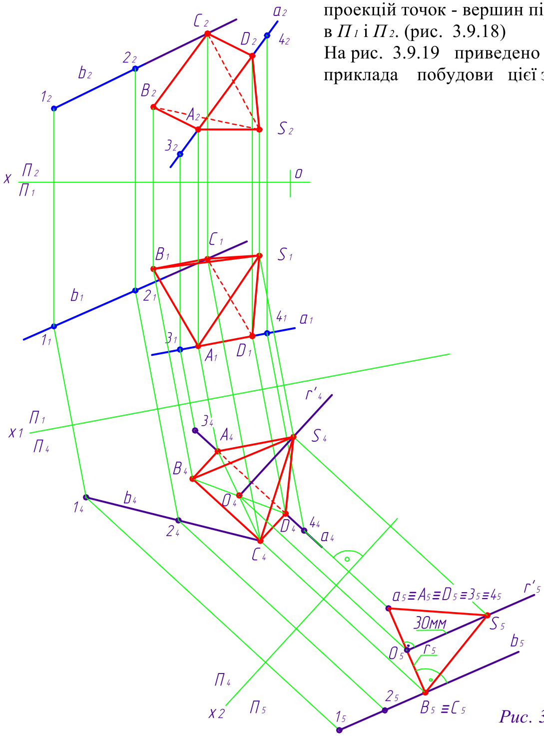


Рис. 3.9.18

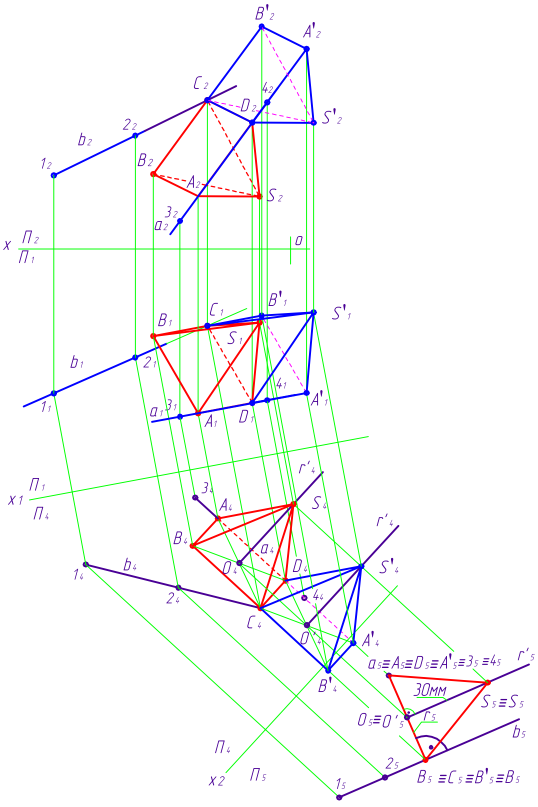

B'2
A'2
C2
42
D2
S'2
22
b2
12
B2
A2
S2
32
a2
x
П2
П1
o
B'1
C1
S'1
B1
S1
b1
21
11
41
A'1
a1
31
A1
D1
П1
x1
П4
r'4
34
A4
S4
r'4
B4
a4
D4
O4
S'4
14
b4
24
44
C4
O'4
A'4
a5≡A5≡D5≡A'5≡35≡45
r'5
B'4
30мм
S5≡S5
O5≡O'5
r5
b5
П4
x2
П5
25
15
B5 ≡C5≡B'5≡B5

Рис. 3.9.19

Задача 9. Побудувати проекцію похилої піраміди *SABC* в горизонтальній площині проекцій, якщо відомо: $S_2A_2B_2C_2$; *f* належить *ABC* і проходить через точку *C*; основа піраміди $ABC \subset \Delta$ і нахилена до фронтальної площини проекцій під кутом 30°; K_4 - проекція основи висоти піраміди на площину проекцій Π_4. Побудуйте проекції висоти піраміди в горизонтальній Π_1 і Π_2 фронтальній площинах проекцій (рис 3.9.20).

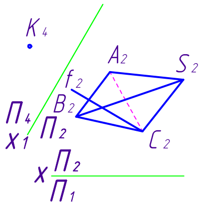
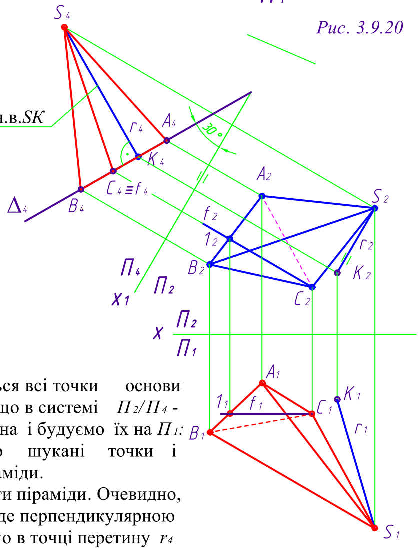


Рис. 3.9.20



Розв'язання.

Побудову починаємо з площини Π_4. В Π_4 проводимо пряму лінію - слід-проекцію площини $\Delta(\Delta_4)$, тобто основи піраміди під кутом $\beta = 30°$, $K \in \Delta(\Delta_4)$.

На $\Delta(\Delta_4)$ проекцюються всі точки основи *ABC*: A_4, B_4, C_4, тому що в системі Π_2/Π_4 - це проекцююча площина і будуємо їх на Π_1: A_1, B_1, C_1. З'єднуємо шукані точки і одержуємо основу піраміди.

Точка *К* - основа висоти піраміди. Очевидно, що в Π_4 висота r_4 буде перпендикулярною до $\Delta(\Delta_4)$. S_4 одержуємо в точці перетину r_4 і лінії зв'язку S_2S_4. З'єднуємо всі точки так, щоб отримати проекції піраміди. В Π_2 проекція висоти $S_2K_2 \| \Pi_4$, $(r_2 \| x_1)$. Будуємо вершину *S* в Π_1: S_1 і точку *К* в Π_1: K_1.

Рис. 3.9.21

Задача 10.

В площині $\boldsymbol{\Sigma}$ $(a \cap b)$ побудувати трикутник ABC. AB = 30 мм, BC = 30 мм; точка $C \subset b$; $a \cap b = A$ (рис. 3.9.22).

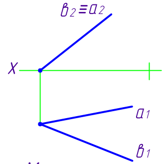


Рис. 3.9.22

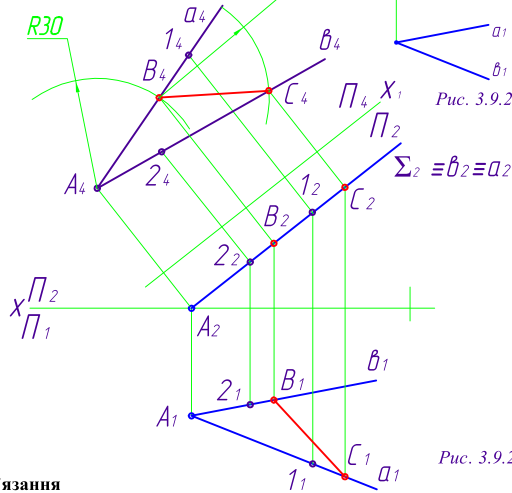


Рис. 3.9.23

Розв'язання

Задана вісь x за умовою проходить через проекцію точки перетину прямих a і b. Оскільки за умовою $a \cap b \Rightarrow A$, то через фронтальну проекцію точки A. Задані прямі a і $в$ утворюють площину $\boldsymbol{\Sigma}$ $(a \cap b)$ і ця площина буде фронтально-проекцюючою, оскільки $a_2 \equiv b_2$. Розв`язуючи цю задачу методом заміни площин проекцій ,

$$x\frac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow x_1\frac{\Pi_2}{\Pi_4}$$

проводимо $\Pi_4 \parallel \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\Sigma}_2)$,тобто $x_1 \parallel \boldsymbol{\Sigma}_2$. Достатньо однієї заміни. Беремо на прямих a і b довільні точки 1 і 2 (наприклад: $1 \in a$, $2 \in b$).

Знаючи, що AB = 30 мм, BC = 30 мм і точка $C \in b$, циркулем будуємо точку B і точку C в Π_4. Спочатку точку B (A_4B_4 = 30 мм), далі з B до перетину з прямою b (B_4C_4 = 30 мм). Будуємо проекції $\Delta(ABC)$ в Π_2 і Π_1; B_2, $C_2 \in \boldsymbol{\Sigma}_2$, оскільки площина $\Delta(ABC) \in \boldsymbol{\Sigma}$ (рис. 3.9.23).

Задача 11.

Побудувати рівнонахилену піраміду з висотою 75 мм і знайти натуральну величину її основи (*ABCDEF* - правильний шестигранник), яка знаходиться в площині $\boldsymbol{\Sigma}$.
Центр O основи має координати в Π_1 (40; 30).
Діаметр кола, описаного навколо основи дорівнює 50 мм. Кут нахилу до Π_1 дорівнює 30°.
Розглядається будь-який варіант розміщення шестикутника в Π_1 (рис. 3.9.24).

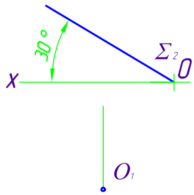


Рис. 3.9.24

Розв'язання

Проводимо вісь Ox і довільно фіксуємо початок координат. В Π_1 будуємо проекцію центра кола O_1 (рис. 3.9.24).

В Π_2 під кутом 30° до Π_1 будуємо проекцію площини (фронтально-проекцююча за умовою задачі). Добудовуємо проекції точок основи піраміди в Π_2. $O_2A_2=O_2D_2=25$ мм. З O_2 будуємо висоту піраміди, що дорівнює 75 мм. З'єднавши вершину S_2 з точками основи отримаємо проекції піраміди в Π_2.

Щоб знайти натуральну величину основи побудованої піраміди використовуємо метод заміни площин проекцій увівши нову площину Π_4 таким чином, щоб вона була паралельною площині , в якій ця основа розміщена

$$x\frac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow x_1\frac{\Pi_2}{\Pi_4} \quad ; \quad \Pi_4 \perp \Pi_2; \quad (x_1 \| \boldsymbol{\Sigma}_2)$$

Оскільки площина за умовою вже проекцююча, достатньо однієї заміни для знаходження натуральної величини основи піраміди.

Добудовуємо проекцію піраміди в Π_1: $A_4x_1=A_1x$ тощо (рис. 3.9.25).

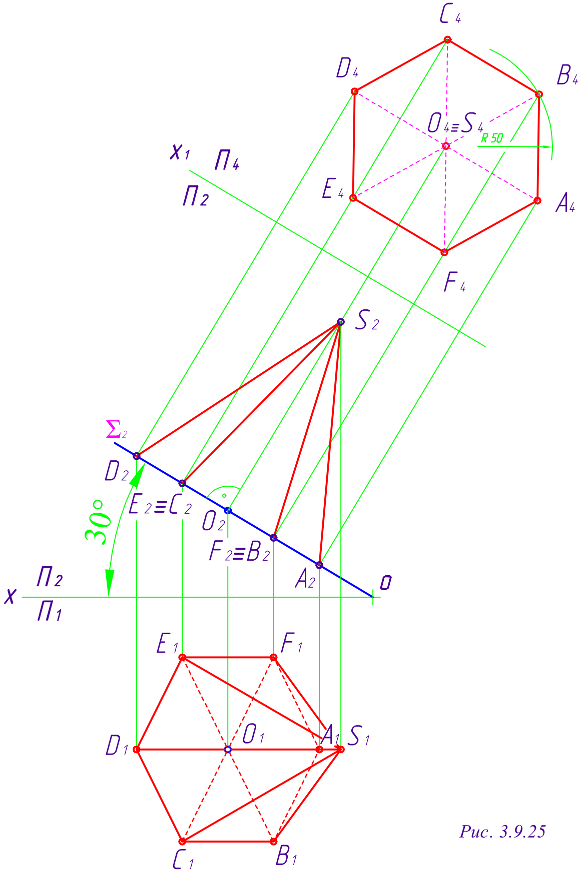

C 4
D 4
B 4
O 4≡S 4
R 50
x 1
П 4
П 2
E 4
A 4
F 4
S 2
Σ 2
D 2
E 2≡C 2
O 2
30°
F 2≡B 2
A 2
0
x
П 2
П 1
E 1
F 1
D 1
O 1
A 1
S 1
C 1
B 1

Рис. 3.9.25

Задача 12.

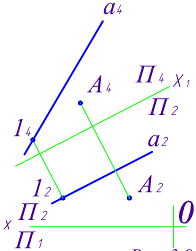


Рис. 3.9.26

Побудувати горизонтальну і фронтальну проекції сфери радіусом R, який дорівнює мінімальній відстані від точки A до прямої a. A - центр сфери. Побудувати горизонтальну проекцію прямої a (рис 3.9.26).
Користуючись методом заміни площин проекцій перетворюємо пряму a в проекцюючу: a_4 - натуральна величина прямої a

$$x_1\frac{П_2}{П_4} \rightarrow x_2\frac{П_4}{П_5};\ П_5 \perp П_4;\ П_5 \perp a_4;\ (x_2 \perp a_4)$$

Відстань від точки A до прямої a в площині проекцій $П_5$ і буде натуральною величиною радіуса шуканої сфери. Цим радіусом ($R_{сфера}$ - *const*) і будуємо в кожній площині проекцій $П_5$; $П_4$; $П_2$; $П_1$ проекції сфери. Для того, щоб побудувати проекцію прямої a в площині проекцій $П_1$, фіксуємо на цій прямій ще одну точку 2 (довільно): $1_4 \rightarrow 1_2 \rightarrow 1_1$; $2_4 \rightarrow 2_2 \rightarrow 2_1$ і з'єднуємо прямою. Одержали горизонтальну проекцію a_1 прямої a (рис 3.9.28).

Задача 13. Добудувати проекції $\Delta\,(ABC)$, що належить площині $\boldsymbol{\Sigma}\ (a \parallel b)$, якщо дано горизонтальну проекцію його сторони A_1B_1, $\angle BAC = 60°$, а висота, трикутника проведена з вершини C на основу AB, дорівнює 35 мм (рис. 3.9.27).

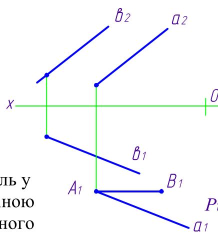


Рис. 3.9.27

Розв'язанняПроводимо горизонталь у площині $\boldsymbol{\Sigma}\ (a \parallel b)$ і першою заміною площин проекцій площина $\boldsymbol{\Sigma}$ з загального положення у просторі перетворюється у проекцюючу площину $\boldsymbol{\Sigma}_4$: $x\frac{П_2}{П_1} \rightarrow x_1\frac{П_1}{П_4}$; $П_4 \perp П_1$; $П_4 \perp h$ $(x_1 \perp h_1)$;

Другою заміною площин проекцій площина $\boldsymbol{\Sigma}$ на $П_5$ проекцюється в натуральну величину, де виконуємо необхідні побудови, що обумовлені задачею:

$$x\frac{П_1}{П_4} \rightarrow x_2\frac{П_4}{П_5}\ ;\ П_5 \perp П_4;\ П_5 \parallel \boldsymbol{\Sigma}\ (x_2 \parallel \boldsymbol{\Sigma}_4);$$

Таким чином отримали точку С (рис. 3.9.29). Задача має два розв`язання.

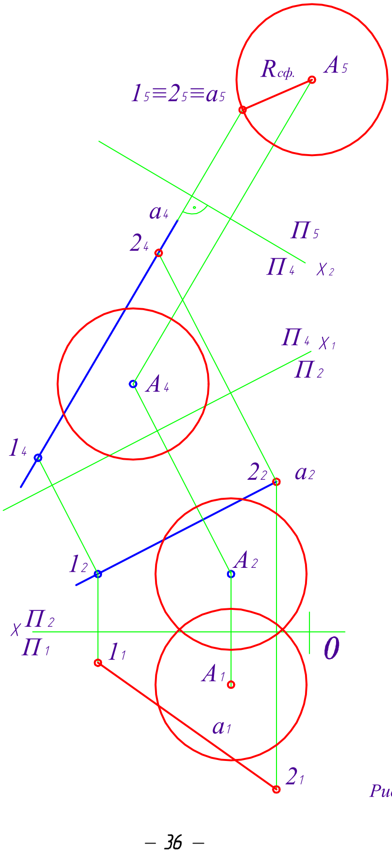

Rсф.
A5
1 5≡2 5≡a 5
a4
П5
2 4
П4
X2
П4
X1
П2
A4
1 4
2 2
a2
1 2
A2
X
П2
П1
1 1
0
A1
a1
2 1

Рис.3.9.28

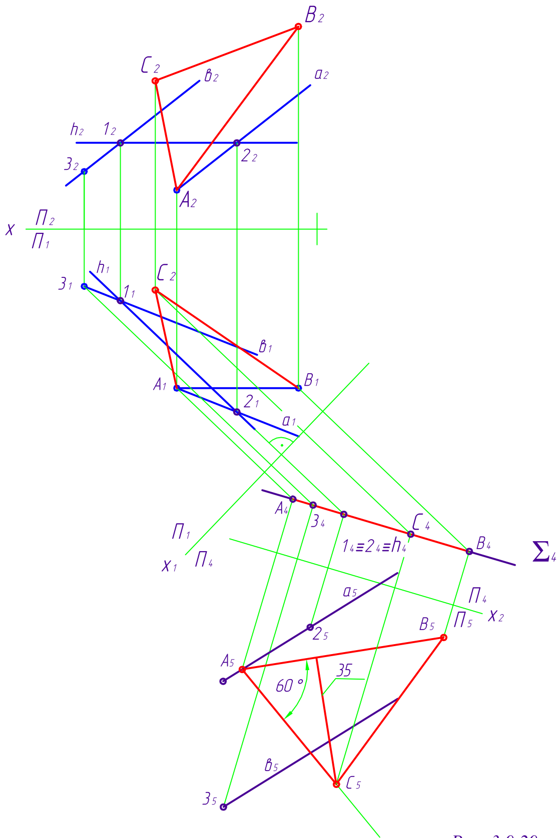

B2
C2
в2
a2
h2
12
22
32
A2
x
П2
П1
h1
31
11
C2
в1
A1
B1
21
a1
A4
34
C4
B4
Σ4
П1
1₄≡2₄≡h4
x1
П4
a5
П4
x2
B5
П5
25
A5
35
60 °
в5
C5
35

Рис. 3.9.29

Задача 14.

Визначити величину двогранного кута при ребрі AB токарного різця (рис. 3.9.30).

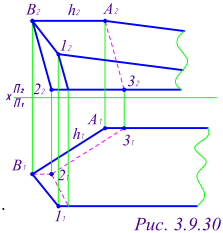


Рис. 3.9.30

Розв'язання

Щоб визначити натуральну величину двогранного кута при ребрі AB, розглянемо які площини складають цей кут. Позначимо точки цих двох площин точками 1, 2 і 3. Тобто, двогранний кут при ребрі AB складається з площини Ω (1, B, A) та з площини $Г$ (2, 3, A, B).

Спільне ребро AB необхідно зробити проекцюючим, тоді визначиться натуральна величина двогранного кута, що утворений площинами Ω і $Г$.

Якби пряма AB була загального положення, то необхідно було б виконувати дві заміни площин проекцій, спочатку перетворити її в натуральну величину, а потім у проецюючу. Але оскільки відрізок AB є горизонталлю, то для перетворення його в проецюючу, пряму треба буде тільки одна заміна (рис 3.9.31).

$$x\frac{П_2}{П_1} \rightarrow x_1\frac{П_1}{П_4} \quad ; \; П_4 \perp П_1 ; \; П_4 \perp h \; ; \; (x_1 \perp h_1);$$

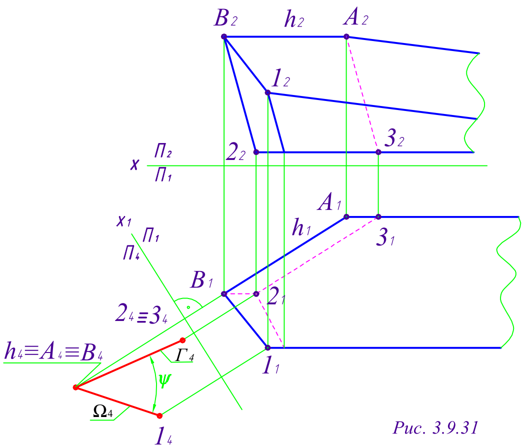


Рис. 3.9.31

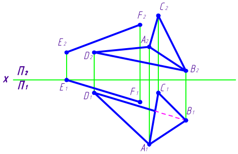


Рис. 3.9.32

Задача 15. На прямій EF знайти точку, рівновіддалену від площин $\boldsymbol{\Sigma}(ABC)$ і $\Theta(ABD)$ (рис. 3.9.32).

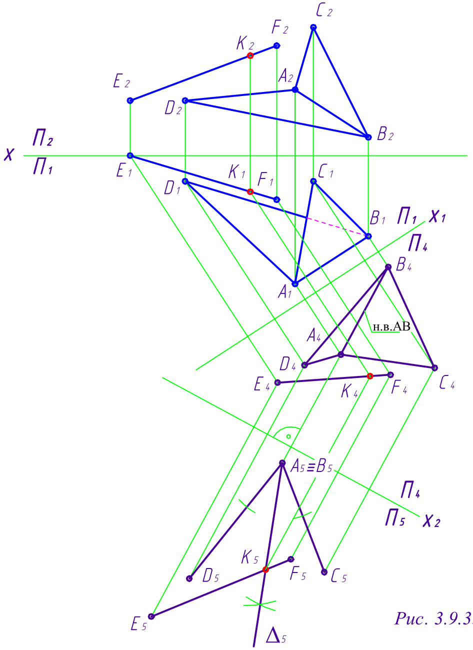


Рис. 3.9.33

Розв'язання задачі 15. Геометричним місцем точок рівновіддалених від сторін двогранного кута, утвореного площинами $\boldsymbol{\Sigma}(ABC)$ і $\Theta(ABD)$ є бісекторна площина $\Delta(\Delta_5)$, яка проходить через середину двогранного кута при ребрі AB. Виконуємо дві заміни площин проекцій (рис. 3.9.33).

$$x\frac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow x_1\frac{\Pi_1}{\Pi_4};\ \Pi_4 \perp \Pi_1;\ \Pi_4 \parallel AB;\ x_1 \parallel A_1B_1;$$

В системі Π_1/Π_4 ребро AB перетворилося в пряму рівня (A_4B_4=н.в. AB).

$$x_1\frac{\Pi_1}{\Pi_4} \rightarrow x_2\frac{\Pi_4}{\Pi_5};\ \Pi_5 \perp \Pi_4;\ \Pi_5 \perp AB;\ x_2 \perp A_4B_4;$$

В системі Π_4/Π_5 ребро AB перетворилося в проекцюючу пряму ($AB \perp \Pi_5$), а дві грані $\boldsymbol{\Sigma}$ та Θ загального положення - в грані проекцюючі; або в проекцюючі площини (в Π_5: $A_5B_5C_5$ і $A_5B_5D_5$ - прямі, тобто сліди-проекції площин ABC і ABD). За допомогою циркуля в площині проекцій Π_5 будуємо бісектрису, яка і буде проекцією бісекторної площини $\Delta(\Delta_5)$. Будуємо проекцію прямої EF в Π_5. K-точка перетину E_5F_5 з $\Delta(\Delta_5)$ і буде проекцією шуканої точки. $K_5 \rightarrow K_4 \rightarrow K_1 \rightarrow K_2$.

Розв'язання задач 16, 17.

Застосовуємо метод заміни площин проекцій. Подавши задані прямі, що перетинаються, як площину основи призми $\boldsymbol{\Sigma}$ ($AB \cap l$), перетворимо її із загального положення, якою вона є, спочатку у проекцюючу, а потім у натуральну величину. Для цього у площину рівня, тобто площині проводимо горизонталь h (можна працювати з фронталлю f).

1 заміна: $x\frac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow x_1\frac{\Pi_1}{\Pi_4};\ \Pi_4 \perp \Pi_1;\ \Pi_4 \perp h;\ x_1 \perp h_1;$

2 заміна: $x_1\frac{\Pi_1}{\Pi_4} \rightarrow x_2\frac{\Pi_4}{\Pi_5};\ \Pi_5 \perp \Pi_4;\ \Pi_5 \parallel \boldsymbol{\Sigma};\ x_2 \parallel \boldsymbol{\Sigma}_4;$ (рис. 3.9.35).

Таким чином в Π_5 отримуємо натуральну величину сторони основи призми AB. Точка $C \in l$; $A_5C_5 = A_5B_5$. Точка D будується враховуючи паралельність протилежних сторін основи. В Π_4 з A_4, B_4, C_4 і D_4 (рис.3.9.37) проводимо лінії звязку до $\boldsymbol{\Sigma}$ і на цих напрямках відкладаємо висоту яка дорівнює 25 мм.

Проекцюємо точки верхньої основи призми A', B', C' і D' на площину Π_1, знаючи, що напрямок висот A_1A', B_1B', C_1C' і D_1D' є $\parallel$ до Π_4, (або до x_1, тобто перпендикулярним горизонталі $h(h_1)$).

Також добудовуємо A_2', B_2', C_2', D_2'. Зберігаючи відстань для перелічених точок, взятих з площини Π_4, наприклад, $B_4'x_1 = B_2'x$ тощо. При цьому не забуваючи, що напрямок сторін призми $A_2'A_2$, B_2B_2', $C_2C'_2$, D_2D_2' має бути перпендикулярним до фронталі f_2, яку проводимо у площині $\boldsymbol{\Sigma}$ додатково (точки *3* і *4*). Будуємо проекції призми в Π_1 і Π_2 враховуючи видимість ребер фігури.

Задача 16. Побудувати проекції ромба та знайти натуральну величину , якщо *l* є напрямком сторони *AC*. *AC* =*AB*(рис. 3.9.34).

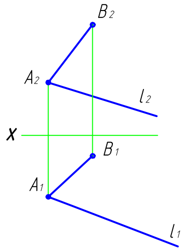


Рис.3.9.34

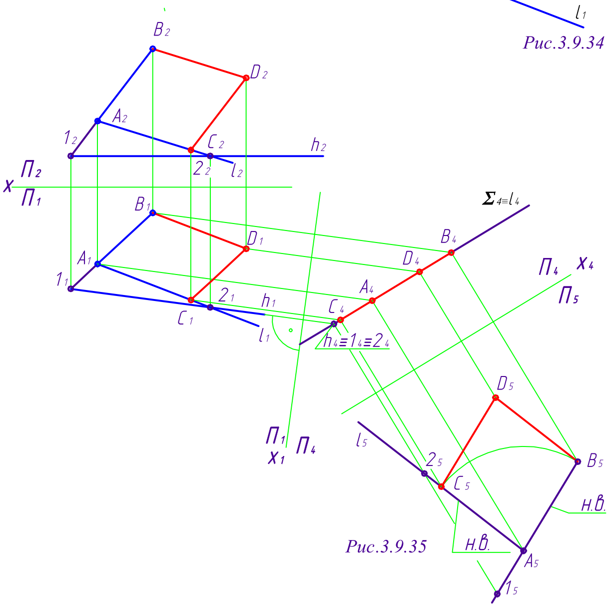


Рис.3.9.35

Задача 17. Побудувати проекції призми та знайти натуральну величину її основи, якщо l є напрямком сторони AC. $AC = AB$. Висота призми дорівнює 25 мм (рис. 3.9.36).

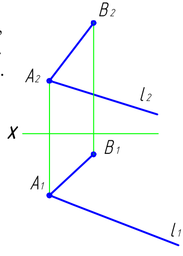


Рис.3.9.36

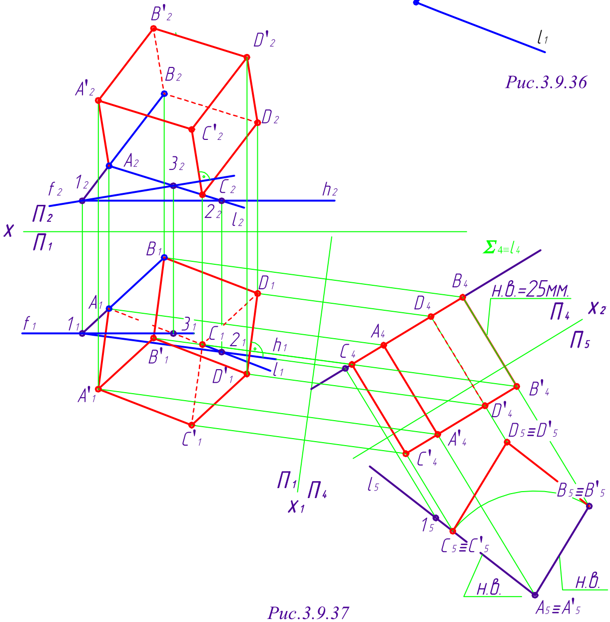


Рис.3.9.37

Задача 18. Дано: трикутник ABC. Побудуйте натуральну величину трикутника і проекції кола, описаного навколо трикутника. Визначте в Π_2 та в Π_1 точки великої і малої осей еліпса (рис. 3.9.38).

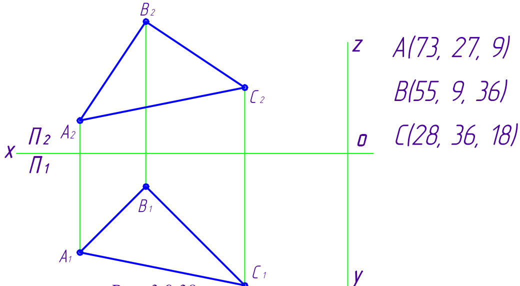


Рис. 3.9.38

Етап 1. Перетворюємо трикутник за допомогою фронталі f спочатку у проекцюючу площину ($x_1 \perp f_2$) (рис. 3.9.39). Потім перетворюємо трикутник у площину рівня (x_2 || площині трикутника). В Π_5 отримали натуральну величину трикутника (рис. 3.9.40).

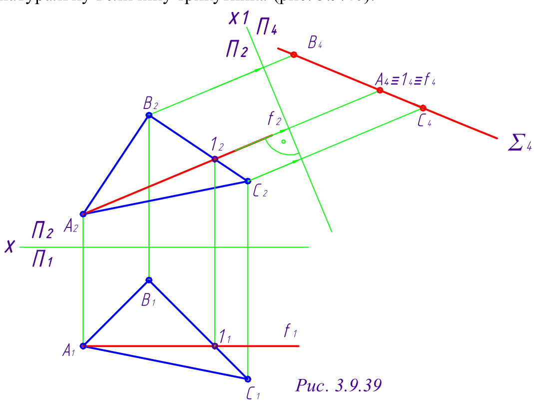


Рис. 3.9.39

Цим перетворенням користуються для визначення натуральної величини плоскої фігури, наприклад трикутника ABC. Спочатку від системи площин проекцій Π_1/Π_2 переходять до системи Π_1/Π_4, в якій площина трикутника ABC перпендикулярна до Π_4 ($x_1 \perp h_1$), і будують її слід-проекцію $A_4B_4C_4$. Потім систему проекцій Π_1/Π_4 перетворюють на систему Π_4/Π_5, в якій площина Π_5 є паралельною площині трикутника. Для цього проводять нову вісь проекцій $x_2 \parallel A_4B_4C_4$.

Етап 2.Будують проекції $A_5B_5C_5$ на площині Π_5. Сполучають побудовані проекції точок прямими в трикутник, який і буде шуканою натуральною величиною оригіналу ABC (рис. 3.9.40).

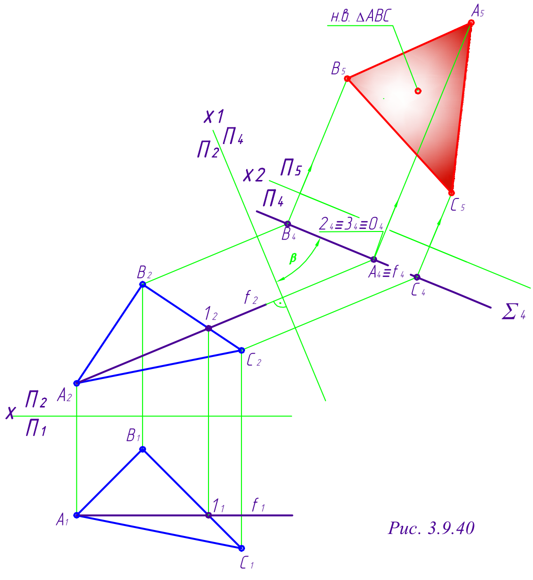
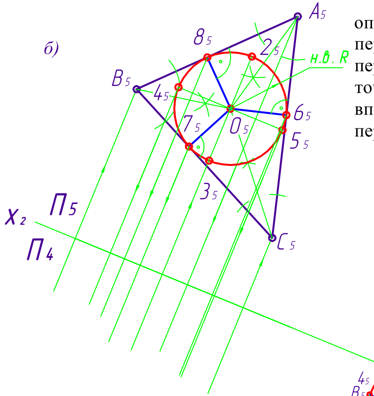


Рис. 3.9.40

Етап 3. Знаходимо центр описаного кола шляхом перетину серединних перпендикулярів. Це буде точка *O* (рис. 3.9.41 а), або вписаного (рис. 3.9.41 б) на перетині бісектрис.



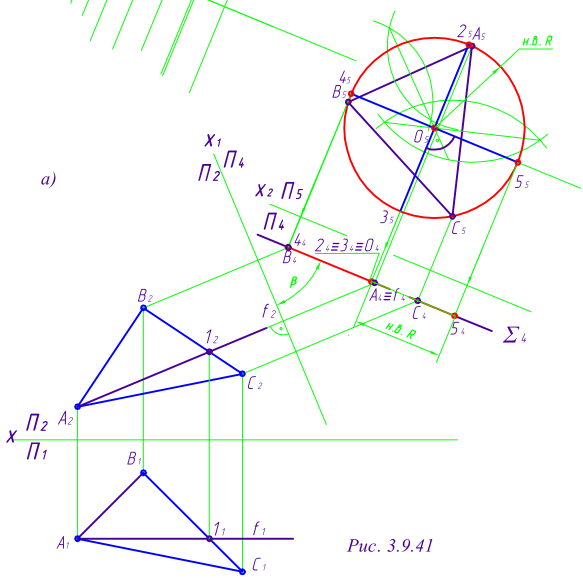


Рис. 3.9.41

Етап 4. Визначаємо точки 4,5 малої осі еліпса, які будуємо в площині $П_2$. Мала вісь еліпса перпендикулярна f_2: $4_2 5_2 \perp f_2$.

Етап 5. Велика вісь еліпса паралельна на $П_2$ фронталі f_2 і буде дорівнювати натуральній величині діаметра кола (або $2R$):
$2_2 3_2 \parallel f_2; 2_2 3_2 = 2R$ (рис. 3.9.42).

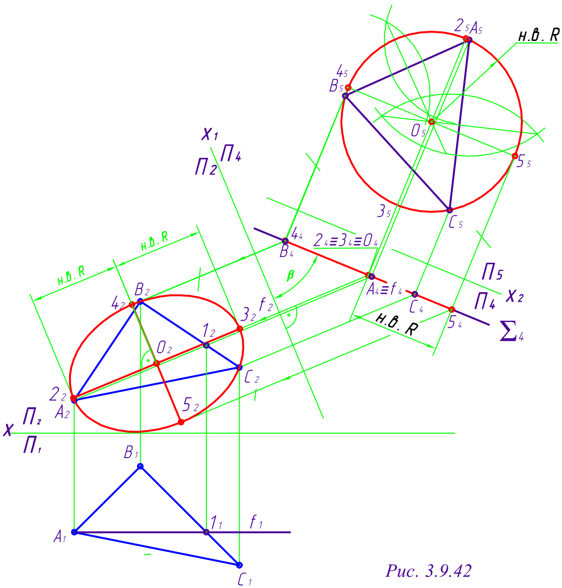


Рис. 3.9.42

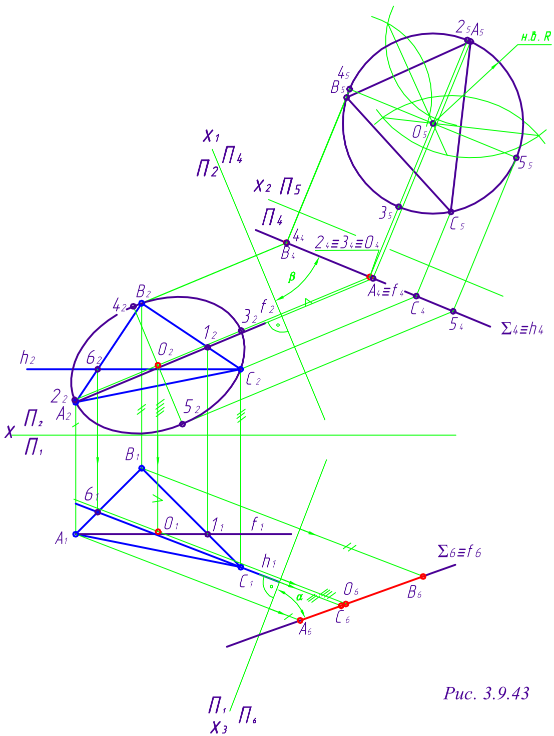


Рис. 3.9.43

Етап 6. Будуємо ще одну заміну (рис. 3.9.43).

$$x_1\frac{П_2}{П_1} \rightarrow x_3\frac{П_1}{П_6} \quad П_6 \perp П_1;\ П_6 \perp \Sigma;\ x_3 \perp h(h_1).$$

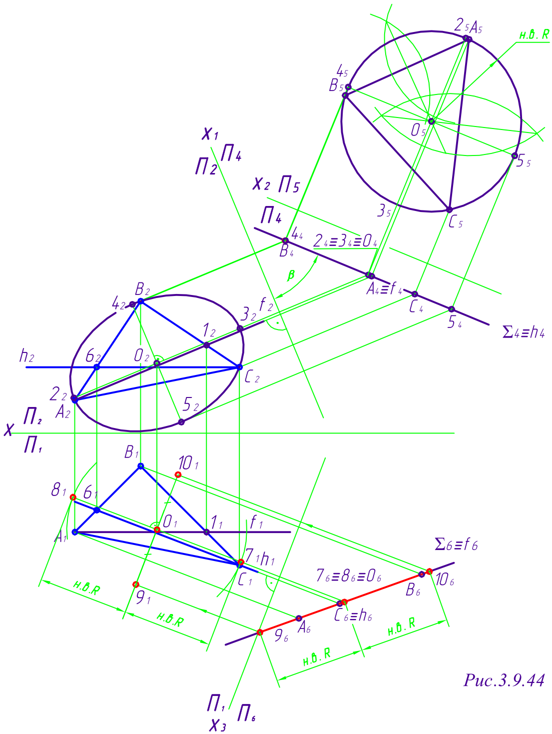


Рис.3.9.44

Етап 7. Відкладаємо величину Ø кола на площині $\Sigma(\Sigma_6)$ і знаходимо таким чином малу вісь еліпса в $П_1(10_1,9_1)$. Велика вісь в $П_1 \| h_1$=Ø кола $(8_1,7_1)$ (рис. 3.9.44,рис. 3.9.45).

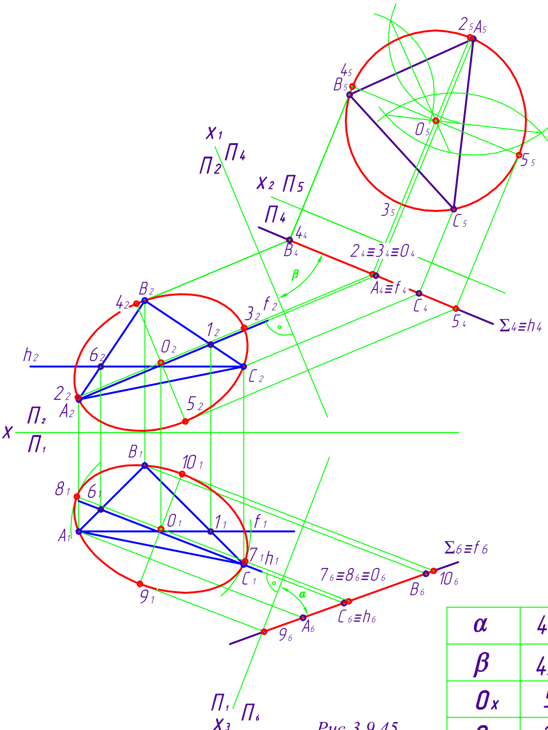


Рис.3.9.45

α	49°
β	45°
Ox	51
Oy	26
Oz	19

Задача 19.

Побудувати конус з висотою 50 мм і основою, описаною навколо $\Delta\ ABC$ (рис. 3.9.46).

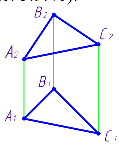


Рис. 3.9.46

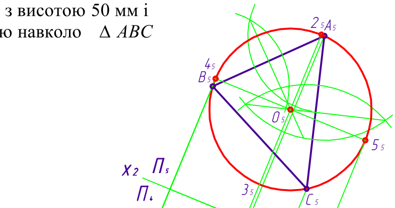
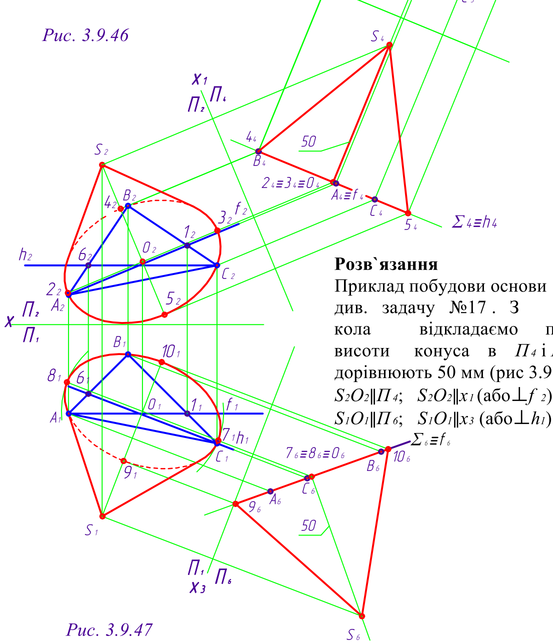



Рис. 3.9.47

Розв\`язання

Приклад побудови основи конусу див. задачу №17 . З центру кола відкладаємо проекції висоти конуса в $П_4$ і $П_6$, які дорівнюють 50 мм (рис 3.9.47).

$S_2O_2 \parallel П_4$; $S_2O_2 \parallel x_1$ (або $\perp f_2$) ;

$S_1O_1 \parallel П_6$; $S_1O_1 \parallel x_3$ (або $\perp h_1$).

Задача 20.

У площині $\Delta(f \cap h)$ побудувати коло радіусом 20 мм з центром у точці O (рис.3.9.48).

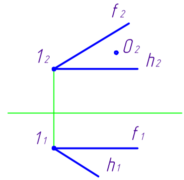


Рис. 3.9.48

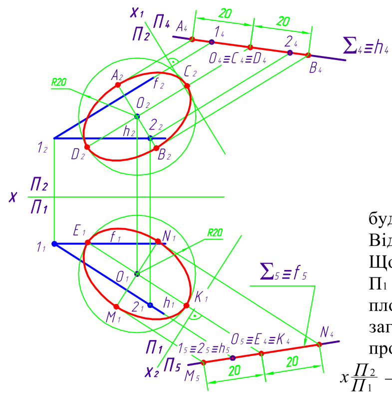


Рис.3.9.49

Розв'язання

Проекції кола в Π_2 і Π_1 будуть мати вигляд еліпсів. Відомий центр кола в Π_2. Щоб визначити центр кола в Π_1 треба перетворити площину $\boldsymbol{\Sigma}$ $(f \cap h)$ із загального положення у проекціюючу

$$x\frac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow x_1\frac{\Pi_2}{\Pi_4};\ \Pi_4 \perp \Pi_2;\ \Pi_2 \perp f;\ (x_1 \perp f_2);$$

Точку перетину фронталі з горизонталлю позначимо як точку 1.

Беремо довільну точку 2 на горизонталі та отримуємо в Π_4 слід площини $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\Sigma}_4)$. Проекціюємо O в $\boldsymbol{\Pi}_4$, оскільки $O \in \boldsymbol{\Sigma}$. І в Π_4 вимірюємо відстань від x_1 до O_4. Відкладаємо її в Π_1 від осі x і отримуємо O_1 - проекцію центра кола. Знаючи, що радіус кола дорівнює 20 мм, в Π_4 від центра (O_4) відкладаємо цю величину та фіксуємо як точки A і B. Проекція малої осі еліпса в Π_2; A_2B_2 - проекція діаметра 40 мм. Велика вісь дорівнюєдіаметру кола - 40 мм і перпендикулярна малій осі еліпса, тобто паралельна f_2. Назвемо велику вісь як CD. За допомогою двох осей в Π_2 можна побудувати еліпс.

Щоб побудувати малу вісь в Π_1, необхідно ще одне перетворення

$$x\frac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow x_1\frac{\Pi_1}{\Pi_5}\quad \Pi_5 \perp \Pi_1;\ \ \Pi_5 \perp h;\ (x_2 \perp h_1).$$

Далі побудова аналогічна попередній. Знаходимо велику вісь EK та малу вісь MN (рис. 3.9.49).

Задача 21.

Дано: дві прямі a і b перетинаються в точці А, утворюючи площину загального положення $\Sigma(a \cap b)$. Визначники точок для побудови проекцій площини: А(25; 8; 44); 1(35; 20; 30); 2(0; 21; 8) (рис. 3.9.50).

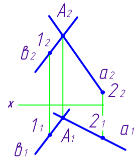


Рис. 3.9.50

Побудувати:

а) правильний тетраедр $SABC$, якщо $\Delta(ABC)$ належить Σ, а ребро AB=30 мм і належить до прямої b.

б) проекції сфери описаної навколо $SABC$.

Задача маэ два розв`язання.

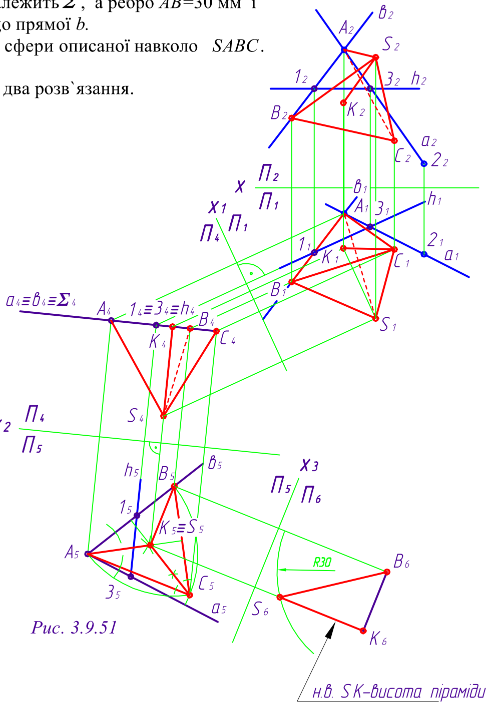


Рис. 3.9.51

Розв'язання.

а) На комплексному кресленику $\boldsymbol{\Sigma}(a \cap b)$ є площиною загального положення. Для побудови, за умови задачі, рівностороннього $\Delta(ABC)$, який належить $\boldsymbol{\Sigma}(a \cap b)$ зі стороною 30 мм, треба отримати натуральну величину $\boldsymbol{\Sigma}(a \cap b)$. Будуємо $h \in \boldsymbol{\Sigma}$ (рис. 3.9.51).

Перша заміна:

$$x\frac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow x_1\frac{\Pi_1}{\Pi_4} \;;\; \Pi_4 \perp \Pi_1;\; \Pi_4 \perp \boldsymbol{\Sigma};\; x_1 \perp h\ (h_1);$$

$$\Sigma(a \cap b) \Rightarrow \Sigma(\Sigma_4).$$

В системі $\frac{\Pi_1}{\Pi_4}$ площина $\boldsymbol{\Sigma}$ перетворилася в проекціюючу.

Друга заміна:

$$x_1\frac{\Pi_1}{\Pi_4} \rightarrow x_2\frac{\Pi_4}{\Pi_5};\quad \Pi_5 \perp \Pi_4;\; \Pi_5 \| \boldsymbol{\Sigma};\; x_2 \| \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\Sigma}_4);$$

Площина $\boldsymbol{\Sigma}$ з проекцюючої перетворилася в площину рівня, тобто в Π_5 маємо її натуральну величину. В Π_5 будуємо рівносторонній трикутник $\Delta(ABC)$, сторона AB якого = 30 мм і належить до прямої b. В Π_5 будуємо вершину S тетраедра. Наводимо всі його ребра.

Третя заміна:

$$x_2\frac{\Pi_4}{\Pi_5} \rightarrow x_3\frac{\Pi_5}{\Pi_6};\Pi_6 \perp \Pi_5;\quad \Pi_6 \| BS;\; x_3 \| BS;\; (x_3 \| B_6S_6);$$

В системі Π_5/Π_6 ребро BS буде пямою рівня і на спроекціюється в натуральну величину. За умовою $BS=AB=BC=CA=30$ мм. На лінії звязку K_6K_5 буде знаходитись проекція висоти піраміди S_6K_6. Відстань від x_3 до K_6 дорівнює відстані x_2 до K_4. Проекцію вершини S_6 будуємо за допомогою циркуля. Будуємо відсутні проекції S:

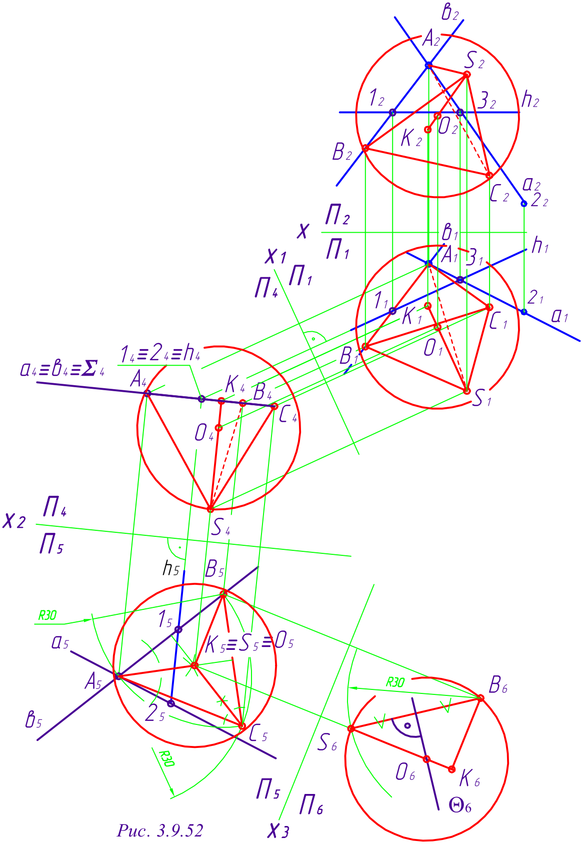
$$S_6 \rightarrow S_5 \rightarrow S_4 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2$$

З`єднуємо всі вершини піраміди, враховуючи видимість.

б) виконуємо спочатку все таке саме, як при розв`язанні а) Через середину B_6S_6 проводимо г.м.т. рівновіддалених від B і S - площину $\Theta(\Theta_6)$. SK (S_6K_6) перетнувши $\Theta(\Theta_6)$ нам дасть проекцію O_6 центра О сфери. Будуємо його на Π_1 і Π_2:

$$O_6 \rightarrow O_5 \rightarrow O_4 \rightarrow O_1 \rightarrow O_2$$

Проекції сфери на всіх площинах проекцій мають однаковий радіус.



b_2
A_2
S_2
1_2
3_2
h_2
O_2
K_2
B_2
a_2
2_2
C_2
x
Π_2
Π_1
b_1
A_1
3_1
h_1
x_1
Π_1
Π_4
1_1
K_1
2_1
a_1
C_1
O_1
B_1
S_1
$1_4 \equiv 2_4 \equiv h_4$
$a_4 \equiv b_4 \equiv \Sigma_4$
A_4
K_4
B_4
C_4
O_4
S_4
x_2
Π_4
Π_5
h_5
B_5
R30
1_5
a_5
$K_5 \equiv S_5 \equiv O_5$
A_5
b_5
2_5
C_5
R30
R30
B_6
S_6
O_6
K_6
Θ_6
Π_5
Π_6
x_3

Рис. 3.9.52

Задача 22.

Визначити методом заміни площин проекцій мінімальну відстань та її проекції від точки A до площини $\boldsymbol{\Sigma}(h^\circ \cap f^\circ)$ і кути нахилу її до Π_1 та Π_2 (рис. 3.9.53).

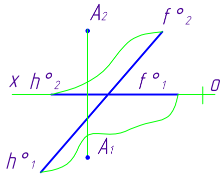


Рис. 3.9.53

Розв'язання

Варіант 1. На комплексному кресленику площина $\boldsymbol{\Sigma}(h^\circ \cap f^\circ)$ є площиною загального положення, яка задана лініями рівня h° і f°. Для визначення відстані перетворюємо задану площину окремого положення, в проекціюючу. Для цього скористаємося допоміжною площиною проекцій Π_4, яка буде перпендикулярною до Π_1 і $\boldsymbol{\Sigma}$ (рис. 3.9.54, а).

Проводимо заміну площин проекцій, (для цього треба, щоб нова вісь x_1 була перпендикулярна h°_1): $x\dfrac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow x_1\dfrac{\Pi_1}{\Pi_4}$ $\quad \Pi_4 \perp \Pi_1$; $\Pi_4 \perp h^\circ$;

Пряма h° на Π_4 проектується в точку h°_4.

Для побудови проекції фронталі f° в Π_4 задаємо дві точки: точка 1 - це точка перетину $h^\circ \cap f^\circ$. Точку 2 обираємо на фронталі f° довільно. Будуємо проекцію точки A в площині Π_4. Оскільки площина $\boldsymbol{\Sigma}$ в системі Π_1/Π_4 є проекцюючою , то для визначення відстані від точки A до площини достатньо провести на Π_4 перпендикуляр r_4 з A_4 до $\boldsymbol{\Sigma}_4$:

$$r_4 \cap \boldsymbol{\Sigma}_4 \Rightarrow K_4; \quad A_4K_4 = \text{н.в. } AK$$

Тепер побубуємо AK на Π_1 і Π_2. Якщо A_4K_4 - натуральна величина AK, то її проекція в Π_1 - A_1K_1 мусить бути паралельною до осі x_1

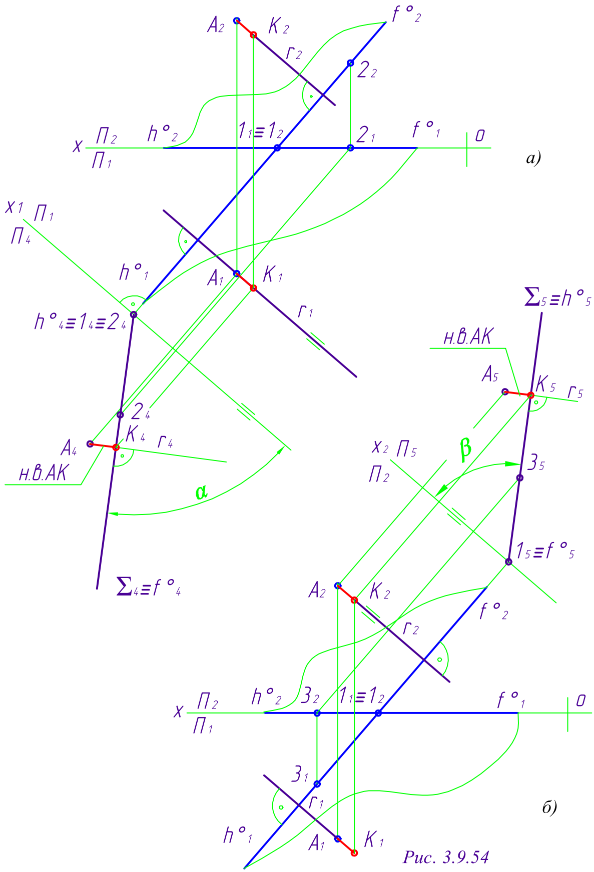
(в системі $\dfrac{\Pi_1}{\Pi_4}$ - AK є прямою рівня). Зверніть увагу, що в Π_1

проекція r перпендикулярна до горизонтальної проекції горизонталі h°_1 площини $\boldsymbol{\Sigma}$: $r_1 \perp h^\circ_1$, тобто $A_1K_1 \perp h^\circ_1$.

В Π_2 проекція перпендикуляра r_2 також розташована під прямим кутом, але до другої лінії рівня f°_2 площини . За допомогою лінії зв'язку точку K проекцюємо на Π_2, на фронтальну проекцію перпендикуляра r (r_2) (рис. 3.9.54). Отримуємо A_2K_2.

Увага ! На рис. 3.9.54, *б* наведено розв'язання цієї задачі за допогою фронталі.

Якщо в першому і другому розв'язанні $A_5K_5 = A_4K_4$ - задачу ро`звязано правильно.



A_2
K_2
f°_2
r_2
2_2
x
Π_2
Π_1
h°_2
$1_1 \equiv 1_2$
2_1
f°_1
0
а)
x_1
Π_1
Π_4
h°_1
A_1
K_1
r_1
$h^\circ_4 \equiv 1_4 \equiv 2_4$
2_4
K_4
A_4
r_4
н.в.AK
α
$\Sigma_4 \equiv f^\circ_4$
$\Sigma_5 \equiv h^\circ_5$
н.в.AK
A_5
K_5
r_5
x_2
Π_5
Π_2
β
3_5
$1_5 \equiv f^\circ_5$
A_2
K_2
f°_2
r_2
x
Π_2
Π_1
h°_2
3_2
$1_1 \equiv 1_2$
f°_1
0
3_1
r_1
б)
h°_1
A_1
K_1

Рис. 3.9.54

Задача 23.

Методом заміни площин проекцій визначити мінімальну відстань від точки A до площини $\Theta(m \parallel n)$ і кути її нахилу до горизонтальної та фронтальної площин проекцій (рис. 3.9.55).

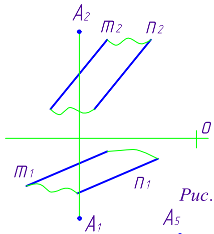
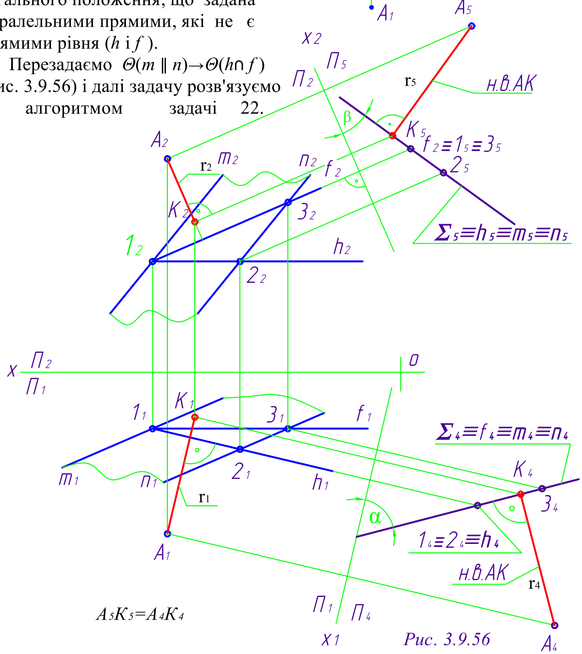


Рис.3.9.55

Розв'язання

На комплексному кресленику площина $\Theta(m \parallel n)$ є площиною загального положення, що задана паралельними прямими, які не є прямими рівня (h і f).

Перезадаємо $\Theta(m \parallel n) \rightarrow \Theta(h \cap f)$ (рис. 3.9.56) і далі задачу розв'язуємо за алгоритмом задачі 22.



$A_5K_5 = A_4K_4$

Рис. 3.9.56

Задача 24. Через точку A в площині $\Theta(A;a)$ провести пряму b, яка перетинає пряму A під прямим кутом. Відстань від точки A до прямої a позначте AK. На одержаному відрізку побудуйте точку M (на всіх площинах проекцій), яка поділить AK у відношенні 1:3 (рис.3.9.57).

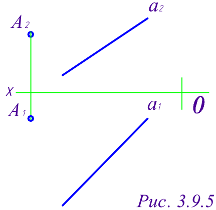


Рис. 3.9.57

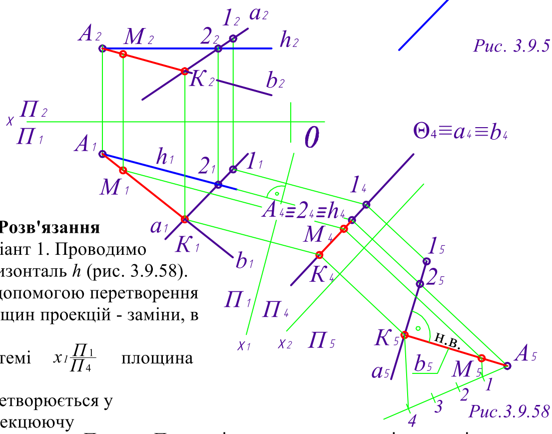


Рис.3.9.58

Розв'язання

Варіант 1. Проводимо горизонталь h (рис. 3.9.58). За допомогою перетворення площин проекцій - заміни, в системі $x_1\frac{\Pi_1}{\Pi_4}$ площина перетворюється у проекцюючу площину $x\frac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow x_1\frac{\Pi_1}{\Pi_4}$; $\Pi_4 \perp \Pi_1$; $\Theta(A,a) \rightarrow \Theta(\Theta_4) \perp \Pi_4$; $(x_1 \perp h_1)$.

За допомогою другої заміни $x_1\frac{\Pi_1}{\Pi_4} \rightarrow x_2\frac{\Pi_4}{\Pi_5}$ площина перетворюється в системі $x_2\frac{\Pi_4}{\Pi_5}$ у площину рівня, і в Π_5 маємо її натуральну величину.

В Π_5 через точку A проводимо перпендикуляр до прямої a. Одержуємо в перетині a і b точку K: $a \cap b \Rightarrow K$.

Одержаний відрізок AK ділимо у співвідношенні 1:3, користуючись теоремою Фалеса. Проводимо через точку A довільний промінь, на якому відкладаємо чотири однакових відрізки). Одержуємо точку M, яку вертаємо в Π_4, Π_1, Π_2.

3.10 Самостійна робота.

Задача 1.

Дано: Визначники точок
A (55; 13; 23); B(40; 7; 8);
C(5; 27; 29); D(19; 46; ?);
E(33; 28; ?); F(50; ? ; ?) ; $EF \parallel AB$.

1. Побудувати: а) за допомогою заміни площин проекцій відсутні проєкції точок D; E; F площини Σ $(ABCDEF)$.
2. Визначити натуральну величину заданої плоскої фігури $\Sigma(ABCDEF)$ (рис 3.10.1).

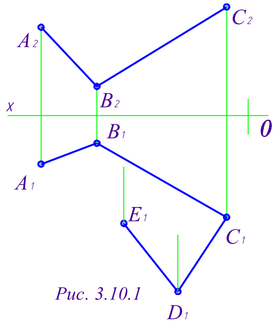


Рис. 3.10.1

Задача 2.

Дано: Визначники точок
1 (55; 13; 23); B(40; 7; 8);
C(5; 27; 29); D(19; 46; ?);
E(33; 28; ?); $AB=30$ *мм*; $AF=35$ *мм*;
$A \in a$; $EF \parallel AB$.

1. Побудувати: а) за допомогою заміни площин проекцій відсутні проекції точок D; E; F площини $\Sigma(ABCDEF)$.
2. Визначити натуральну величину заданої плоскої фігури $\Sigma(ABCDEF)$(рис 3.10.2).

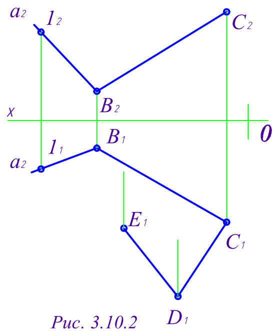


Рис. 3.10.2

Задача 3.
Побудувати зрізану чотирикутну призму (рис. 3.10.3), у якої нижня основа - квадрат зі стороною 35 мм, ребра бічної поверхні перпендикулярні Π_1. Верхня основа розташована під кутом 20° до Π_1. Знайти натуральну величину верхньої основи. Точки M і N належать граням призми. Побудуйте відсутні проекції цих точок, за умови, що на Π_2 точка M є видимою, а точка N є невидимою. Наведіть два варіанти розв'язання цієї задачі.

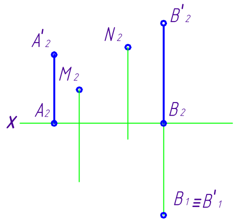


Рис. 3.10.3

Задача 4
Побудувати зображення тетраедра у трьох проекціях за даною основою (рис 3.10.4).

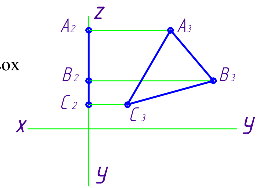


Рис. 3.10.4

Задача 5.
Побудувати зрізаний прямий круговий конус, якщо AB - висота, діаметр основи =40 мм. A - вершина конуса (рис 3.10.5).

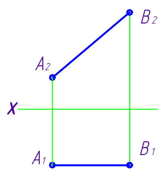


Рис. 3.10.5

Задача 6.
Побудувати сферу з радіусом, який дорівнює AO (рис 3.10.6).

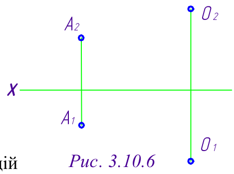


Рис. 3.10.6

Задача 7.
Методом заміни площин проекцій визначити мінімальну відстань від точки A до площини $\Sigma(h^\circ \cap f^\circ)$ і побудувати її проекції і кути нахилу до площин проекцій (рис.3.10.7).
Розв'язання задачі є аналогічним до розв'язання задачі 22 (рис. 3.9.53).

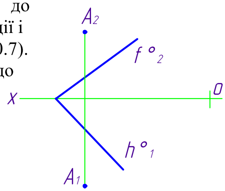


Рис. 3.10.7

Задача 8
Методом заміни площин проекцій визначити відстань від точки A до площини $\Sigma(h^\circ \cap f^\circ)$, якщо відомі визначники точок: $1(35;0;0)$, $2(65;25;0)$, $3(25;0;20)$, $A(50;0;25)$ (рис 3.10.8).

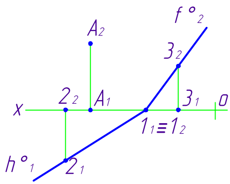


Рис. 3.10.8

Задача 9.
Методом заміни площин проекцій визначити мінімальну відстань від точки A до площини $\Delta(KLM)$, і кут її нахилу до горизонтальної площини проекцій, якщо відомі визначники точок: $K(45;15;0)$, $L(33;30;23)$, $M(10;15;13)$, $A(25;30;0)$ (рис 3.10.9).

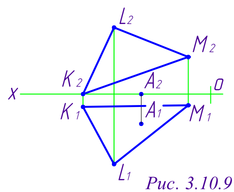


Рис. 3.10.9

Задача 10
Визначити мінімальну відстань між вершиною *S* і ребром *BC* похилої піраміди *SABCD* (рис 3.10.10).

Задача 11.
Визначити величину двогранного кута при ребрі *AS* похилої піраміди *SABCD* (рис 3.10.11).

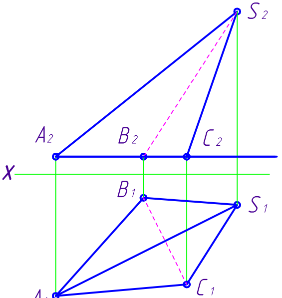


Рис. 3.10.11

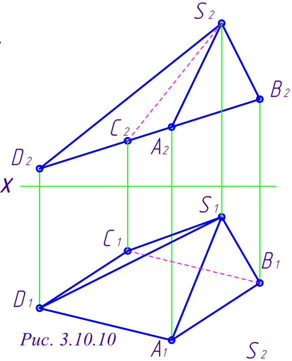


Рис. 3.10.10

Задача 12. Визначити висоту похилої піраміди *SABC* з вершиною *S* (рис 3.10.12).

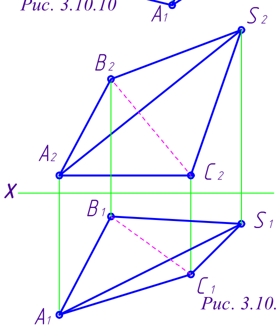


Рис. 3.10.12

Задача 13. Побудувати циліндр з висотою 40 мм, якщо задано центр *O* нижньої основи . Пряма *b* - вісь циліндра, *a* - твірна циліндра (рис 3.10.13).

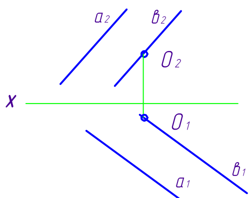


Рис. 3.10.13

Задача 14.
Побудувати квадрат *ABCD* із стороною, яка дорівнює відстані між *a* і *b*, у якого $AB \in a$, $C \in b$ (рис 3.10.14).

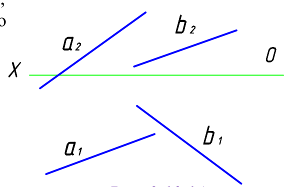


Рис. 3.10.14

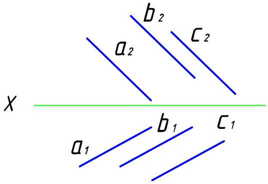


Рис. 3.10.15

Задача 15.
Знайти точку *K*, яка належить Π_1 і рівновіддалена від заданих прямих *a*, *b*, *c* (рис. 3.10.15).

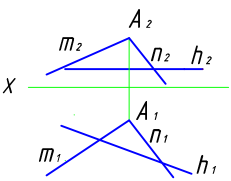


Рис. 3.10.16

Задача 16. Побудувати ромб *ABCD*, вершина *B* якого рівновіддалена від сторін *m* і *n* плоского кута φ, а сторона *BC* належить прямій *h* (рис 3.10.16).

Задача 17.
Побудувати a_2 прямої *a*, точки якої рівновіддалені від площин *Σ (ABC)* і *Θ(BDC)* (рис 3.10.17).

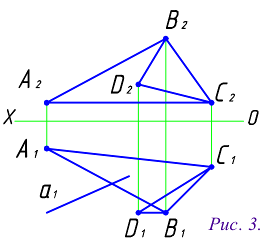


Рис. 3.10.17

Задача 18.
Побудувати рівнобедрений трикутник ABC, вершина B, якого рівновіддалена від прямих m і n, $BC \parallel h$, $AB=BC$ (рис 3.10.18).

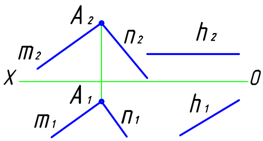


Рис. 3.10.18

Задача 19.
Побудувати проекції кулі в площинах проекцій $П_2$, $П_1$, лінії перетину її з площиною $\Sigma(\Sigma_4)$, $f\cap h=1$. Знайти н.в. фігури перерізу (рис. *3.10.19*).

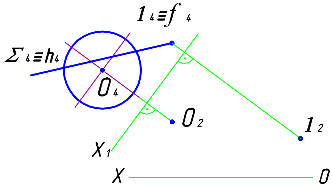


Рис. 3.10.19

Задача 20.
Побудувати лінію перетину конуса з площиною $\Sigma(f\cap h)$, $f\cap h=1$. Як називається лінія перетину заданого конуса з площиною (рис.*3.10.20*).

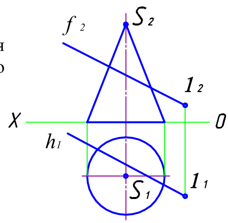


Рис. 3.10.20

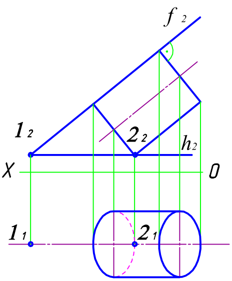


Рис. 3.10.21

Задача 21.
Побудувати лінію перетину циліндра з площиною $\Sigma(f\cap h)$, $f\cap h=1$. і знайти н.в. основи циліндра. (рис. *3.10.21*)

Задача 22.
Побудувати проекції фігури ABCD в $П_2$ та $П_1$. Якщо відомо:
$A_4B_4=B_4C_4=C_4D_4=D_4A_4$
$AD \in h$; $A \in f$:
$A_4B_4//D_4C_4$;
$B_4C_4//A_4D_4$ (рис.*3.10.22*)

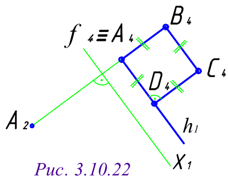


Рис. 3.10.22

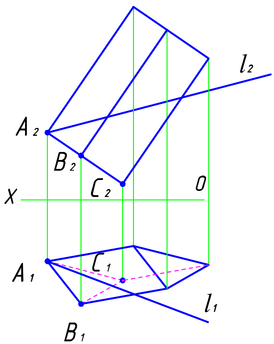


Рис. 3.10.23

Задача 23.
Знайти н.в. кута між прямою $\boldsymbol{l}$ і основою призми ABC заданої призми (рис.*3.10.23*).

Задача 24.
Знайти н.в. основи заданої піраміди ABC; н.в. ребра SA і кут його нахилу до основи піраміди (рис.*3.10.24*).

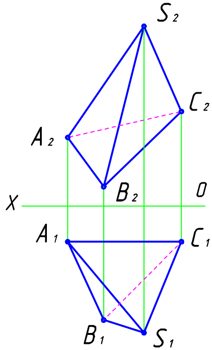


Рис. 3.10.24

Задача 25.

Знайти відстань між f і $f`$, якщо відомо: $f` \cap h = 2$ і площина $\Sigma(f \cap f`)$ нахилена до Π_2 під кутом 30 ° (рис.*3.10.25*).

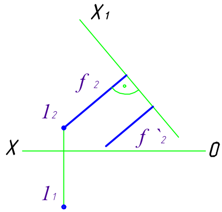


Рис. 3.10.25

Задача 26.

Побудувати призму, основа якої - квадрат, що належить площині Σ . Висота призми дорівнює 50 мм. (рис. *3.10.26*).

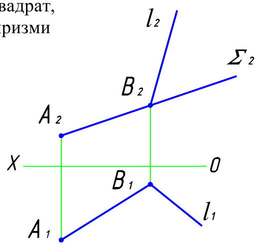
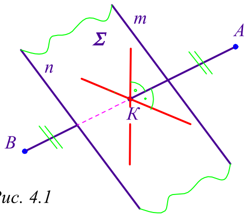


Рис. 3.10.26

4. ГЕОМЕТРИЧНІ МІСЦЯ

Геометричне місце точок (ГМТ), рівновіддалених від двох точок - це площина, яка проходить через середину відрізка, що з'єднує ці дві точки, перпендикулярно до нього.



$A \cup B = AB$
$AB/2 \Rightarrow K$
$K \ni \Sigma$
$\Sigma \perp AB$

Σ - ГМТ, рівновіддалених від двох точок A і B.

Рис. 4.1

Задача 1. Визначники точок $A(50;\ 12;\ 8)$ і $B(15;\ 26;\ 8)$. Побудувати площину Σ рівновіддалену від точок A і B (рис. 4.2).

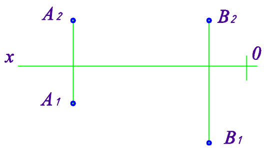
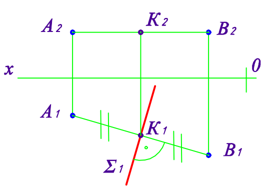


Рис. 4.2

Розв'язання.

З'єднуємо точки A і B прямою лінією (рис. 4.3).

Отримуємо AB - пряму окремого положення (пряму рівня), горизонталь $(Z_A = Z_B)$. Площина, яка перпендикулярна до лінії окремого положення, теж буде площиною окремого положення і задається однією лінією: слідом-проекцією. Тому заміну площин проекцій тут не робимо.



$AB/2 \Rightarrow K$
$\Sigma(\Sigma_1) \ni K$
$\Sigma(\Sigma_1) \perp AB$

Рис 4.3

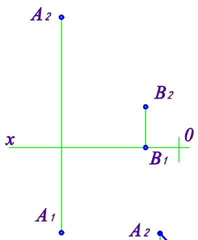


Рис. 4.4

Задача 2. (рис. 4.4).
Дано: визначники точок *A(50; 48; 52)* і *B(30; 0; 12)*.
Побудувати геометричне місце точок рівновіддалених від точок *A* і *B*.

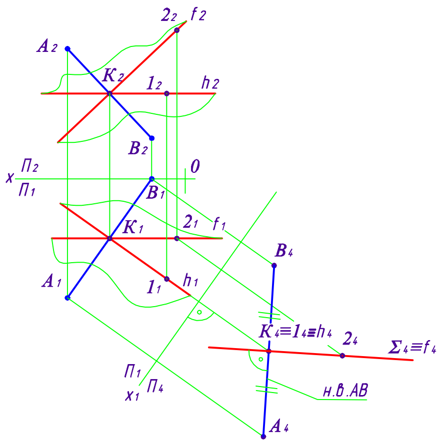


Рис.4.5

Розв'язання.

З'єднуємо *A* і *B* прямою лінією. Відрізок *AB* - це пряма загального положення. Щоби перетворити *AB* у пряму рівня треба зробити заміну площин проекцій.

$x П_2/П_1 \Rightarrow x_1 П_1/П_4$; $П_4 // AB$; $(x_1 // A_1B_1)$

В площині $П_4$ відрізок *AB* є натуральною величиною. В системі $П_1/П_4$ пряма *AB* - пряма рівня. Тепер $AB(A_4B_4)$ ділимо навпіл (точка *K*) і проводимо шукану площину $\boldsymbol{\Sigma}$ $(\boldsymbol{\Sigma_4})$. Позначаємо в площині проекцій $П_4$: *h* і *f* площини $\boldsymbol{\Sigma}$ $(\boldsymbol{\Sigma_4})$ і будуємо *h* і *f* в $П_1$ і $П_2$. $\boldsymbol{\Sigma}(h \cap f) \perp AB$ (рис 4.5).

Задача 3. (рис. 4.6)
Дано: визначники точок $A(45;\ 48;\ 52)$ і $B(25;\ 0;\ 12)$. Пряма $l(l_1;l_2)$. Визначники точок, що належать l: $1(83;\ 34;\ 32)$, $2(56;\ 25;\ 0)$.
Побудувати: рівнобедрений трикутник ABC, вершина C якого знаходиться на прямій l.

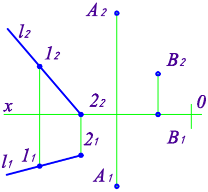


Рис. 4.6

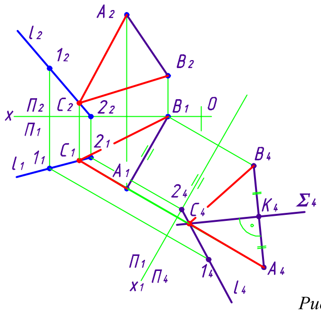


Рис. 4.7

Розв'язання:

З'єднуємо проекції точок:
$A_1 \cup B_1$
$A_2 \cup B_2$.
Шукаємо ГМТ, рівновіддалених від A і B (рис. 4.7). За допомогою заміни площин проекцій перетворюємо AB у пряму окремого положення (рівня).

$x\Pi_2/\Pi_1 \Rightarrow x_1\Pi_1/\Pi_4$; $\Pi_4 // AB$; A_4B_4=н.в. AB. $A_4B_4/2 \Rightarrow K_4$;

Через точку K_4 проводимо площину $\boldsymbol{\Sigma}$ $(\boldsymbol{\Sigma_4}) \perp A_4B_4$. Будуємо на полі Π_4 проекцію l_4 прямої l. Там, де l перетнеться з площиною $\boldsymbol{\Sigma}$ і буде знаходитись шукана вершина C трикутника.
$l_4 \cap \boldsymbol{\Sigma_4} = \boldsymbol{C_4}$;
$\boldsymbol{C_4} \Rightarrow \boldsymbol{C_1} \Rightarrow \boldsymbol{C_2}$
З'єднавши всі вершини, отримуємо відповідь.

Геометричне місце точок рівновіддалених від площини - це площина, всі точки якої віддалені від заданої площини на однакову відстань (паралельна до неї).

Задача 4. (рис. 4.8).

Дано:Δ *(ABC)* і пряма ***t***. Визначники точок: *A*(60; 15; 5); *B*(35; 5; 27); *C*(20; 30;10) і точок, які належать до прямої ***t*** : *1*(80; 52; 5); *2*(50; 32; 38).

Побудувати:

а) площину $\Delta'(A'B'C')$, яка розташована від Δ на відстані 35 мм;

б) точку *K*, яка знаходиться на прямій *t* на відстані 35 мм від *ABC*.

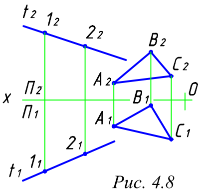


Рис. 4.8

Розв'язання:

а) заміною площин проекцій перетворюємо Δ (*ABC*) у проекцюючу $\Delta(\Delta_4)$. Для цього проводимо *h* в площині Δ (*ABC*). А далі: $x\frac{П_2}{П_1} \Rightarrow x_1\frac{П_1}{П_4}$;

$П_4 \perp П_1; П_4 \perp \Delta\,(ABC); (x_1 \perp h_1)$.

Геометричним місцем точок рівновіддалених від $\Delta(\Delta_4)$ на відстань 35 мм, буде $\Delta'(\Delta'_4)$, або $\Delta'_4(A'_4B'_4C'_4)$. Будуємо $\Delta_1'(A'_1B'_1C'_1)$ і $\Delta'_2(A'_2B'_2C'_2)$.

б) $t_4\Delta'_4 = K_4$; $K_4 \Rightarrow K_1 \Rightarrow K_2$ (рис. 4.9)

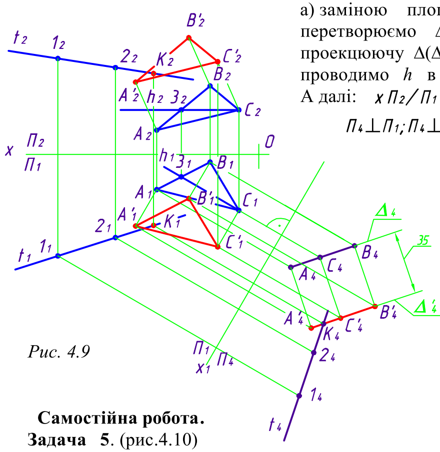


Рис. 4.9

Самостійна робота.

Задача 5. (рис.4.10)

Дано: *Θ (h∩f)*. Визначники точок, які належать *h* і *f* : *1*(45; 10; 6); *2*(15; 10; 30); *C*(35; 38; ?).

Побудувати: за допомогою заміни площин проекцій фронтальну проекцію точки *C*, яка розташована на відстані 30 мм від площини *Θ (h∩f*). Запишіть її координати.

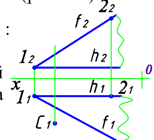


Рис. 4.10

5. АКСОНОМЕТРИЧНІ ПРОЕКЦІЇ

Метод зображення отримав назву **аксонометрії** від двох грецьких слів αεων - вісь та μετρω - вимірюю, а проекції, отримані за допомогою аксонометричного проекціювання, називаються аксонометричними.

Аксонометричні зображення часто доводиться наводити на технічному кресленику предмета в ортогональних проекціях. Таке зображення охоплює одночасно наочність і зручність вимірювань. На рис. 5.1 наведено порівняння наочного (аксонометричного) зображення з ортогональним.

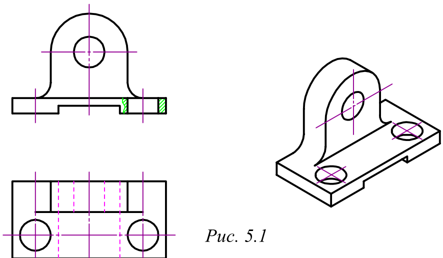


Рис. 5.1

Суть аксонометричного проекціювання полягає:

а) предмет розглядається одночасно із зручно вибраною системою прямокутних координат $Oxyz$, відносно до якої він є нерухомим. Систему $Oxyz$ називають натуральною, істинною або просторовою системою;

б) на осях Ox, Oy, Oz задають деякий, однаковий для всіх осей, натуральний масштаб, який дає можливість вимірювання вздовж осей;

в) предмет і натуральну (просторову) систему координат проекцюють паралельно заданому напряму S на деяку площину проекцій Π'. На площині Π' отримують зображення предмета і осей з масштабними одиницями, проекції яких в загальному випадку різної довжини.

Отримане зображення дозволяє вимірювати вздовж осей. На рис. 5.2 дано схему проекціювання точки на площину Π. Напрям проекціювання показаний стрілкою S. Осі Ox, Oy, Oz ортогональної системи координат проекцюються на Π' в осі аксонометричної системи $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$. Точка A' - аксонометрична проекція точки A, точка A'_1 - вторинна проекція точки A. Залежно від напрямку проекціювання відрізки $O'A_x' = x'$, $O'A_y' = y'$, $O'A_z' = z'$.

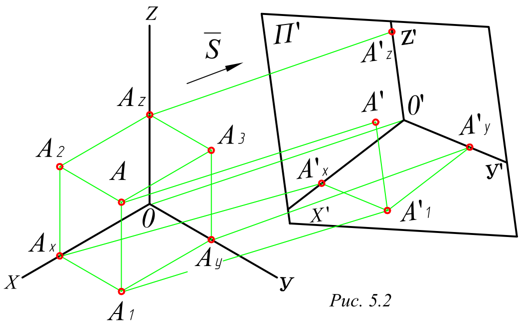


Рис. 5.2

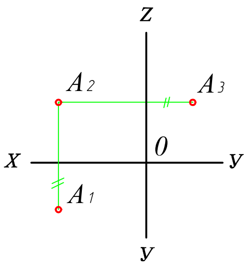


Рис. 5.3

Напрям проекціювання S і положення площини $П'$ вибрані довільно відносно натуральної прямокутної координатної системи. Тому координати x, y, z на $П'$ спроекціювалися із спотворенням.

Відношення довжини аксонометричної проекції відрізка координатної осі до натуральної довжини самого відрізка цієї осі називається коефіцієнтом (показником) спотворення:

$$\frac{O'A_x'}{OA_x} = \frac{x'}{x} = u; \quad \frac{O'A_y'}{OA_y} = \frac{y'}{y} = v; \quad \frac{O'A_z'}{OA_z} = \frac{z'}{z} = w\,.$$

Отже, аксонометричні координати точки обчислюються за формулами: $x' = xu$, $y' = yv$, $z' = zw$, де x, y, z - ортогональні координати точки. Якщо напрямок S проекціювання перпендикулярний до площини $П'$, то аксонометрична проекція буде прямокутного, в іншому разі - косокутною. Нижче схематично наведено види аксонометричних проекцій (рис. 5.4):

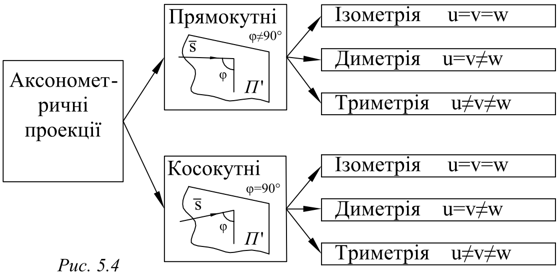


Рис. 5.4

Будь-яка зміна напрямку проекціювання та положення площини $П'$ викликає зміну взаємного розміщення аксонометричних осей $O'x'y'z'$ і коефіцієнтів спотворення u, v, w. Ця залежність описується теоремою німецького вченого К. Польке, сказаною в 1853 р., яка має настільки важливе значення для теорії аксонометричних проекцій, що вона отримала назву основної теореми аксонометрії:

будь-які три довільно вибрані відрізки, які виходять з однієї точки, на площині можуть бути прийняті за паралельні проекції трьох однакових взаємоперпендикулярних відрізків у просторі.

Вздовж осей просторового координатного кута $Oxyz$ (рис. 5.5) відкладемо однакові відрізки $OA = OB = OC$ і з'єднаємо між собою точки A, B і C.

Отримаємо тетраедр $OABC$ з прямим кутом біля вершини O і однаковими ребрами OA, OB і OC, які сходяться у вершині цього кута. При паралельному проекціюванні на довільну площину $П'$, тетраедр $OABC$ спроекцюється в чотирикутник $O'A'B'C'$.

Теорему К. Польке узагальнив Г.А. Шварц, довівши, що *будь-який чотирикутник на площині є паралельною проекцією тетраедра будь-якої форми і, в окремому випадку, тетраедра з прямим тригранним кутом і однаковими ребрами, які сходяться в його вершині*.

Теорема Польке-Шварца дає можливість довільно спрямовувати аксонометричні осі і вибирати коефіцієнти спотворення, керуючись при виборі цих даних виключно зручностями розміщення рисунка чи досягаючи більшої його наочності (рис. 5.5).

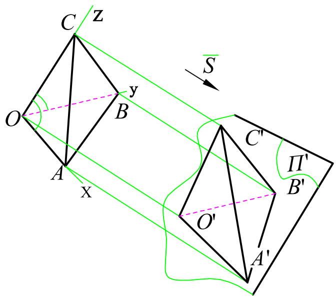
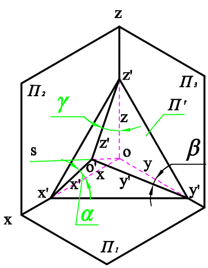


Рис. 5.5

Між коефіцієнтами спотворення в аксонометрії існує певна залежність. Маємо прямокутну координатну систему *Oxyz*, площину *Π'* і напрям *S* (рис. 5.5).



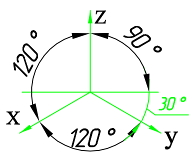


Рис. 5.6 *Рис. 5.7*

Позначимо точки x', y', z' перетину координатних осей з площиною $П'$ і з'єднаємо одержані точки прямими. Ці прямі є лініями перетину площини $П'$ з координатними площинами xOy, yOz і xOz чи слідами координатних площин на площину $П'$. Трикутник $x'y'z'$ називається аксонометричним трикутником слідів.

Для того, щоб одержати аксонометричні осі на площині $П'$ визначають точку O' перетину проекцюючого променя S, який виходить з точки O, з площиною $П'$. Одержану точку O' з'єднуємо з точками x', y' і z'. Відрізки $O'x'$; $O'y'$; $O'z'$ - аксонометричні осі на $П'$.

Позначимо кут $Ox'O'$ через α ; кут $Oy'O'$ через β та кут $Oz'O'$ через γ .

З тригонометрії відомо, що сума квадратів косинусів напрямних кутів дорівнює одиниці, тобто

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

або

$$(1 - \sin^2\alpha) + (1 - \sin^2\beta) + (1 - \sin^2\gamma) = 1; \qquad (1)$$

$$\sin\alpha \frac{O'x'}{Ox} = u ; \qquad \sin\beta \frac{O'y'}{Oy} = v ; \qquad \sin\gamma \frac{O'z'}{Oz} = w . \qquad (2)$$

підставляючи значення (2) до рівняння (1) маємо

$$(1 - u^2) + (1 - v^2) + (1 - w^2) = 1;$$

або

$$u^2 + v^2 + w^2 = 2. \qquad (3)$$

У прямокутній ізометрії сума квадратів коефіцієнтів спотворення дорівнює 2.

В косокутних аксонометричних проекціях для викладу коефіцієнтів спотворення використовується формула

$$u^2 + v^2 + w^2 = 2 + \mathrm{ctg}2.$$

В *прямокутній ізометрії* коефіцієнти спотворення за всіма трьома осями однакові

$$u = v = w,$$

тобто площина аксонометричних проекцій рівно нахилена до всіх трьох координатних осей. Підставляючи до рівняння (3) замість v і w однакову їм величину u маємо:

$$3u^2 = 2; \qquad u = 0{,}82$$

тобто $u = v = w = 0{,}82$.

В *прямокутній диметрії* коефіцієнти спотворення вздовж осі $O'y'$ вдвічі менше, ніж вздовж осей $O'x'$ і $O'z'$, тобто

$$u = w; \qquad v = u / 2.$$

Підставляючи ці значення до рівняння (3) маємо:

$$2u^2 + (u / 2)^2 = 2;$$

$$u = 0{,}94; \qquad w = 0{,}94; \qquad v = 0{,}47.$$

Одержані значення коефіцієнтів спотворення в прямокутній ізометрії та диметрії є *істинні, або точні*.

При побудові зображень в прямокутній ізометрії користуються *приведеними коефіцієнтами спотворення*: $u = v = w = 1$.

Зображення виходить збільшеним в прямокутній ізометрії в 1,22 раза

(1 / 0,82 = 1,22).

В прямокутній *диметрії приведені коефіцієнти* спотворення: $u = w = 1$; $v = 0{,}5$.

Тому наочне зображення збільшується в 1,06 раза
(1 / 0,94 = 1,06).

На практиці користуються приведеними коефіцієнтами, що трохи збільшує наочне зображення, але не псує його.

Зображення точки в прямокутній ізометрії показані на рис. 5.8. Побудова прямої - на рис. 5.9.

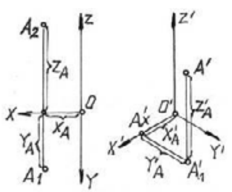


Рис. 5.8

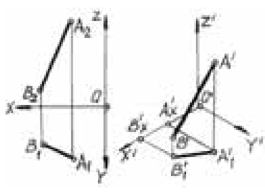


Рис. 5.9

Питання та відповіді .

1. На якому з наведених рисунків зображені осі прямокутної ізометрії?

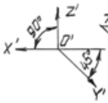


Рис. 5.10

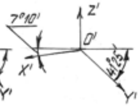


Рис. 5.11

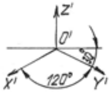


Рис. 5.12

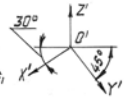


Рис. 5.13

Відповідь: рисунок 5.12.

2. Запишіть показники спотворення ***u, v, w*** вздовж осей x', y', z' для приведеного кресленика у прямокутній ізометрії.

Відповідь: $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} = 1$.

3. Запишіть розмір діаметра (мм) циліндричного отвору моделі, яка зображена у прямокутній ізометрії на рисунку 5.14 (кресленик - приведений).

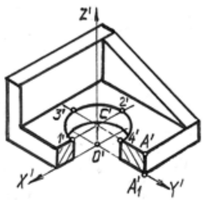


Рис. 5.14

Відповідь: діаметр кола циліндричного отвору = 1'2' = 3'4' .

4. Запишіть натуральні координати точки A, показаної на рисунку 5.14.

Відповідь: $x_A = x_{A'} = 0$; $y_A = y_{A'} = 0'A_1' = C'A'$; $z_A = z_{A'} = 0'C' = A_1'A'$.

5. На рисунку 5.15 правило штриховки у прямокутній ізометрії. Розмір 0'1' = a (мм), запишіть розміри 0'2' і 0'3' у функції від розміру a.

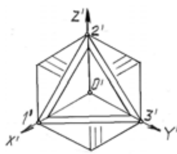
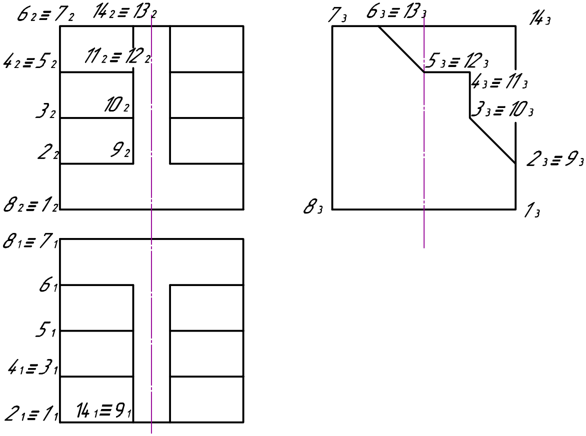


Рис. 5.15

Відповідь: 0'2' = 0'3' = a.

Приклад побудови заданої фігури в прямокутній ізометрії рис. 5.16.



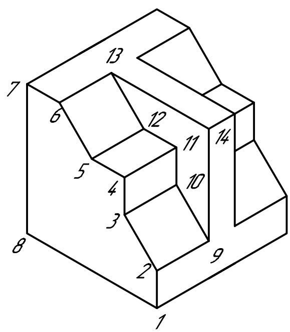


Рис. 5.16

Умова до задач 1-4 :Побудувати один з варіантів профільних проекцій заданих фігур та їх прямокутні ізометрії.

Задача 1.

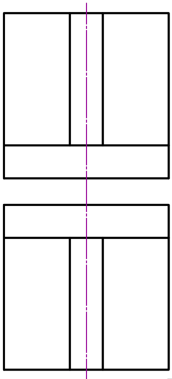


Рис. 5.17

Задача 2.

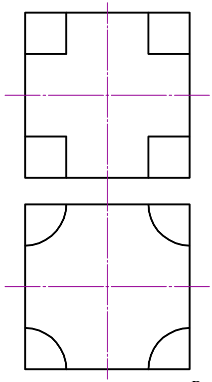


Рис. 5.18

Задача 3.

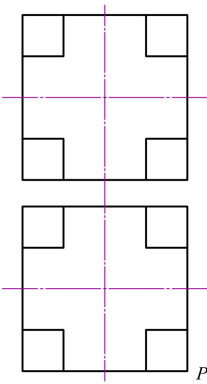


Рис. 5.19

Задача 4.

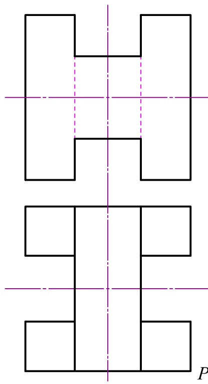


Рис. 5.20

6. ПОВЕРХНІ

Поверхні за своїми властивостями та різноманітністю форм, за своїм значенням, які вони мають в науці, техніці, архітектурі, образотворчому мистецтві, не мають собі рівних серед інших геометричних образів.

Безмежна кількість творінь природи, споруд та речей, створених людиною, обмежені певними сполученнями поверхонь.

За кількістю форм поверхні є безмежними. В математиці під поверхнею розуміють неперервну множину точок, між координатами яких в декартовій системі існує залежність вигляду $F(x, y, z) = 0$, де $F(x, y, z)$ - багаточлен n-го степіня або якась трансцендентна функція. Виходячи з цього поверхні називають алгебраїчними або трансцендентними. Відомо, що рівняння площини має вигляд:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Таким чином площина є алгебраїчною поверхнею першого порядку.

В інженерній графіці використовують різні способи завдання поверхонь. Найбільш поширеними є аналітичний, каркасний та кінематичний способи.

Каркасний спосіб поділяється на завдання поверхні за допомогою каркасу точок або ліній. Кінематичний утворює поверхню переміщенням лінії у просторі за наперед заданим законом.

Розглянемо найбільш поширені в дисципліні «Інженерна графіка» гранні, криволінійні та лінійчасті поверхні.

6.1 Гранні поверхні

Гранні поверхні утворюються замкненими просторовими фігурами, які являють собою багатокутники. Вершини та сторони багатокутників є вершинами та ребрами гранної поверхні.

На протязі свого існування людство приділяло велику увагу вивченню геометричних властивостей багатокутників.

Загальновідомі видатні споруди давнини: єгипетські піраміди, храми та замки. Багатогранні форми містять деталі машин, механізмів та верстатів. Багатогранники є невід'ємною складовою частиною технічної оптики. Вони часто зустрічаються в природі у вигляді різних кристалічних будов. Всі метали, більшість хімічних реактивів та речовин за своєю геометричною суттю є багатогранниками. При конструюванні складних криволінійних форм їх часто замінюють з певним степенем точності гранними поверхнями.

Найбільш поширеними багатогранниками є піраміди, призми, призматоїди та тіла Платона.

Багато видатних вчених займались дослідженням їх властивостей. Зокрема, вивченням правильних багатогранників займалися такі видатні вчені, як Евклід, Платон, Декарт, Ейлер.

Правильний багатогранник - це опуклий багатогранник, у якого всі грані рівні правильні багатокутники та всі багатогранн і кути рівні. Евклід в своїх «Началах» довів, що існує тільки п'ять типів правильних багатокутників (рис. 6.1.1): а) правильний тетраедр, б) правильний гексаедр (куб), в) правильний октаедр, г) правильний икосаедр, д) правильний додекаедр.

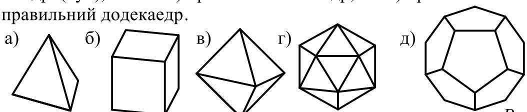


Рис.6.1.1

Ці багатогранники та деякі їх властивості були досліджені більш ніж дві тисячі років тому грецьким філософом Платоном. Їх називають тілами Платона.

Кожний з них може бути одержаний шляхом перетину куба площиною. Біля кожного з них можна описати, або вписати сферу.

Для кожного з них справедлива формула (теорема) Декарта-Ейлера:

$$B + \Gamma - P = 2,$$

де B - кількість вершин,

Γ - число граней,

P - число ребер.

При розв`язанні інженерно-геометричних задач найбільш часто використовуються прості багатогранні поверхні. Це поверхні, в яких усі грані поверхні - прості багатокутники, тобто ніяка пара суміжних сторін не має спільних точок; ніякі дві несуміжні грані не мають спільних точок (за винятком спільної вершини); дві суміжні грані мають лише одну спільну пряму.

Якщо вся багатогранна поверхня розташована по один бік площини будь-якої грані, вона називається опуклою. Для будь-якого опуклого багатогранника може бути застосована формула Декарта-Ейлера.

Актуальними задачами при вивченні багатогранних поверхонь є задача побудови точки на поверхні та задача перетину поверхні багатогранника площиною.

З цією метою в посібнику наведено задачі на побудову як самих поверхонь, так і точок на них. Розв'язання цих задач поглиблює уяву про проекціювання таких поверхонь та розвиває просторове мислення.

Задачі на побудову перетину багатогранника площиною є складовою частиною таких задач, як задача зображення геометричного тіла складної форми, та побудови перерізів геометричних моделей технічних форм.

6.2 Лінійчасті та криволінійні поверхні. Визначення

Виходячи з графічного завдання поверхні в інженерній графіці під визначником поверхні розуміють неперервну сукупність послідовних положень лінії, яка переміщується в просторі за наперед заданим законом.

Положення лінії неперервно змінюється. Якщо прийняти час за параметр, то поверхню можна розглядати як неперервну однопараметричну множину ліній. А оскільки ця лінія є неперервною одно параметричною множиною точок, то *поверхня може бути визначена як неперервна двопараметрична множина точок*.

Припустимо, що поверхня задається каркасом ліній M. Причому множина ліній M, яка створює каркас, є правильною, тобто я такою, у якої будь-які дві лінії не мають спільних точок. Тоді через кожну точку поверхні проходить одна лінія множини M (рис. 6.2.1)

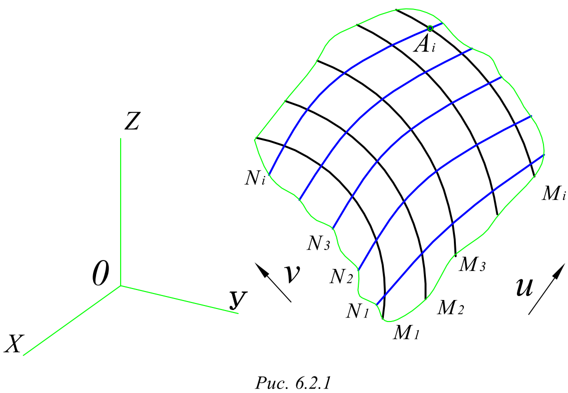


Рис. 6.2.1

Побудуємо на поверхні другу правильну множину ліній N (рис. 6.2.1). Лінії множин M і N утворюють на поверхні сітку; причому лінії різних множин перетинаються тільки в одній точці. Задамо для кожної з цих ліній певний параметр; наприклад, для ліній множин M - параметр u, а для ліній множини N - параметр v.

Параметри u і v називають криволінійними координатами точки, а лінії множин M і N - координатними лініями поверхні.

Якщо побудувати таку поверхню в тривимірній декартовій системі координат x, y, z, то кожна точка поверхні A_i, яка має координати x_i, y_i, z_i може бути визначена перетином ліній M_i та N_i. Причому декартові координати точки будуть функціями криволінійних координат u, v.

$$\begin{cases} x = x\ (u, v) \\ y = y\ (u, v) \\ z = z\ (u, v) \end{cases}$$

Ця система рівнянь називається параметричним рівнянням поверхні.

Якщо розв'язати перше і друге рівняння відносно u і v та підставити отримані вирази в третє рівняння, то отримаємо рівняння вигляду:

$$z = z\ (x, y).$$

Його називають рівнянням поверхні в явному вигляді. Поверхні n-го порядку перетинаються вздовж лінії того ж порядку.

Криволінійні поверхні поділяють на криволінійні поверхні з твірною сталого вигляду та криволінійні поверхні з твірною змінного вигляду. Визначник таких поверхонь має вигляд:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \Phi\ (l, m)\ [A],$$

де l - твірна лінія поверхні,

m - напрямна лінія поверхні (або напрямні),

$[A]$ - закон руху твірної лінії вздовж напрямної, або алгоритмічна частина.

Для побудови поверхні на кресленику необхідно спочатку побудувати всі геометричні елементи, які складають поверхню. Потім, використовуючи закон творення поверхні, побудувати її обриси на заданих площинах проекцій, або каркас поверхні на заданому відрізку.

Лінійчасті поверхні - це поверхні, які утворюються рухом прямолінійної твірної. Закон руху в інженерній графіці задається напрямними лініями.

Лінійчаста поверхня в загальному випадку однозначно визначається трьома напрямними лініями (рис. 6.2.2).

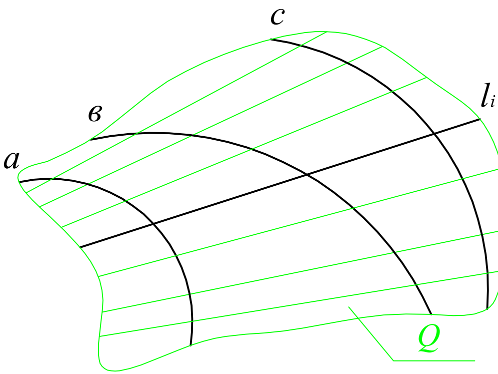


Рис. 6.2.2

Наприклад лінійчаста поверхня Q має визначник:

$$Q\ (a, b, c, l),$$

де a, b, c - напрямні лінії;

l - твірна лінія поверхні.

При такому визначенні лінійчастої поверхні довільно можна задавати тільки дві напрямні. Третя напрямна лінія повинна знаходитись в середині конгруенції прямих, яка визначається двома заданими напрямними. Під конгруенцією прямих розуміють множину прямих, залежних від двох параметрів.

В цьому випадку закон творення поверхні Q можна записати у вигляді:

$l_i \cap a$;

$l_i \cap b$;

$l_i \cap c$.

Якщо напрямні a, b, c є алгебраїчними кривими, які мають порядки na, nb, nc, то порядок лінійчастої поверхні

$n = 2 \cdot na \cdot nb \cdot nc$.

Актуальним завданням інженерної графіки для лінійчастих та криволінійних поверхонь є задача побудови поверхні за заданими умовами та побудова точки на поверхні.

6.3 Приклади побудов та задачі на побудови точки на гранній поверхні.

Перетин гранних поверхонь площиною

Задача 1.

Дано: дві проекції гранного тіла, у якого зрізано передню верхню ліву вершину. Побудувати його профільну проекцію (рис. 6.3.1).

Розв'язання.

Позначити координатні осі ***x, y, z*** і літерами або цифрами проекції вершин багатогранника. Побудувати за допомогою координатних осей і літер профільну проекцію (рис. 6.3.2).

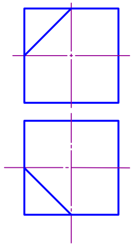


Рис. 6.3.1

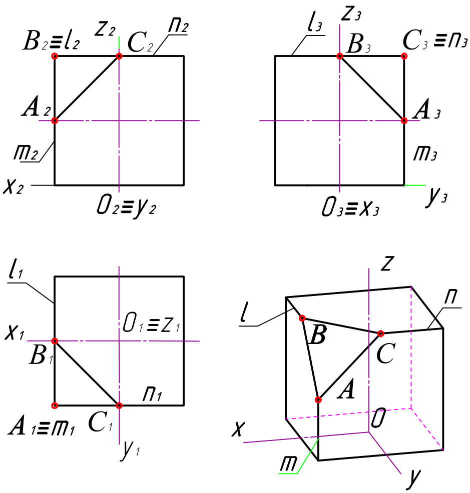


Рис. 6.3.2

Задача 2.
Дано: дві проекції гранного тіла. Побудувати його профільну проекцію (рис. 6.3.3).

Розв'язання.
Позначити координатні осі ***x, y, z*** і літерами або цифрами проекції вершин багатогранника. Побудувати за допомогою координатних осей і літер профільну проекцію (рис. 6.3.4).

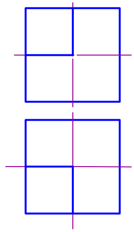


Рис. 6.3.3

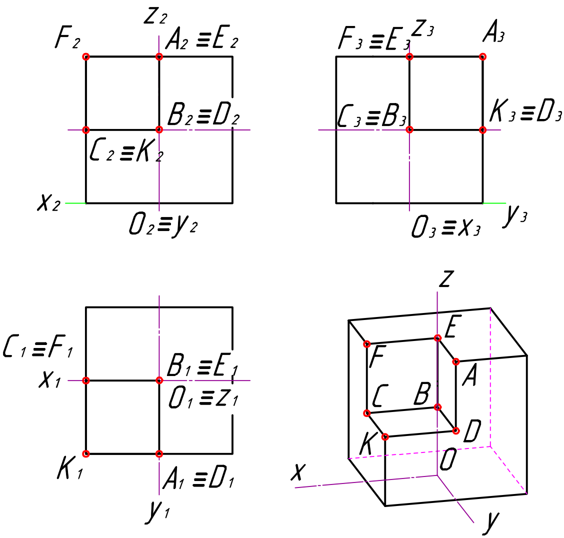


Рис. 6.3.4

Задача 3.
Дано: дві проекції багатогранника. Побудувати його горизонтальну проекцію (рис. 6.3.5).

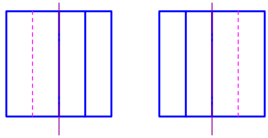


Рис.6.3.5

Розв'язання.
Позначити координатні осі ***x, y, z*** і літерами або цифрами проекції вершин гранного тіла. Тоді за допомогою координатних осей і літер побудувати його горизонтальну проекцію (рис. 6.3.6).

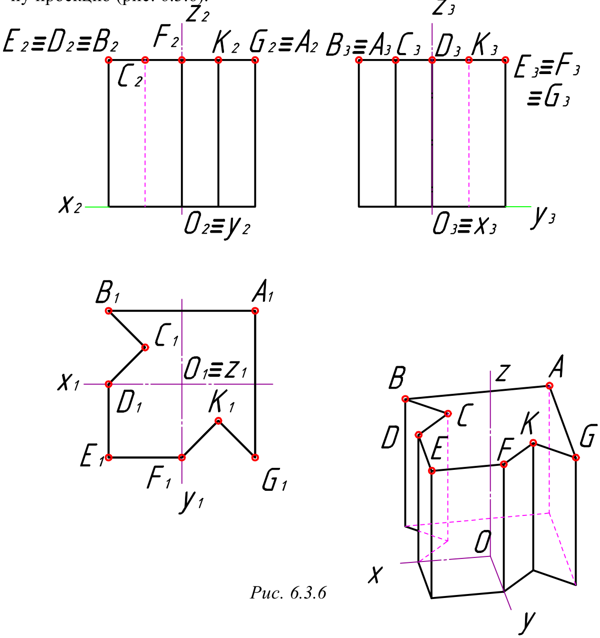


Рис. 6.3.6

7. ПЕРЕТИН ПОВЕРХНІ ГЕОМЕТРИЧНОГО ТІЛА ПЛОЩИНОЮ

Перетином поверхні геометричного тіла площиною є пласка лінія. Вона уявляє собою геометричне місце точок, які одночасно належать поверхні тіла та площині.

Форма цієї лінії залежить від форми поверхні геометричного тіла та взаємного розташування тіла та площини.

Фігура, яка утворюється перетином геометричного тіла площиною називається перерізом.

Поверхня геометричного тіла та січна площина можуть займати різне положення у просторі.

Форма геометричного тіла може містити як поверхні одного виду, так і поверхні різних видів. Наприклад, складені поверхні, які складаються з різних поверхонь (лінійних, криволінійних). Такі випадки можуть бути зведені до трьох основних задач. Розглянемо їх геометричні моделі:

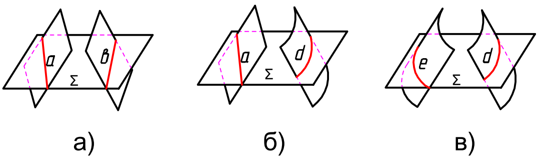


Рис. 7.1

Перша задача (рис. 7.1 а) - поверхня тіла складається з гранних поверхонь. В цьому випадку лінія перетину буде складатися з відрізків прямих.

Друга задача (рис. 7.1 б) - поверхня тіла складається з гранних та криволінійних поверхонь. Лінія перетину складається з відрізків прямих та сегментів кривих.

Третя задача (рис. 7.1 в) - поверхня тіла складається з криволінійних поверхонь. Лінія перетину складається з сегментів кривих ліній.

Задачі на визначення ліній перетину поділяють за розташуванням площин у просторі: на задачі, в яких площина займає окреме положення та на задачі, в яких вона є площиною загального положення.

Найбільш поширеними задачами є задачі перетину площини з гранними поверхнями, а також сферичними, циліндричними та конічними поверхнями. Розглянемо різні випадки таких перетинів.

7.1 Перетин багатогранника площиною

В загальному випадку перерізом багатогранника площиною буде багатокутник, вершинами якого є точки перетину ребер багатокутника з січною площиною, а сторонами - відрізки прямих перетину граней багатогранника з січною площиною.

Виходячи з цього визначають два способи побудови лінії перетину - спосіб ребер та спосіб граней.

Проілюструємо ці два способи на прикладі перетину піраміди SABC та площини (рис. 7.1.1).

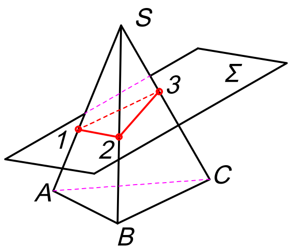


Рис. 7.1.1

Спосіб ребер	Спосіб граней
1) $SA \cap \Sigma \Rightarrow 1$	1. $ASB \cap \Sigma \Rightarrow 1 - 2$
2) $SB \cap \Sigma \Rightarrow 2$	2. $BSC \cap \Sigma \Rightarrow 2 - 3$
3) $SC \cap \Sigma \Rightarrow 3$	3. $CSA \cap \Sigma \Rightarrow 3 - 1$
4) $1 \cup 2 \cup 3 \Rightarrow 1 - 2 - 3$	

Розв'язання задачі способом ребер більш просте порівняно зі способом граней, тому на практиці його застосовують частіше.

7.2 Перетин гранного тіла з проекцюючою площиною. Побудова натуральної величини фігури перерізу.

Виходячи з актуальних задач інженерної графіки слід зауважити, що окрім форми перерізу необхідно мати його метрику. Для цього будують натуральну величину фігури перерізу.

Алгоритм побудови лінії перетину:

1. Досліджуємо форму поверхні та взаємного розташування поверхні тіла та січної площини. Поверхня при цьому може бути поверхнею одного виду, або складеного.

На основі дослідження робимо висновок про форму лінії перетину у просторі. Форму проекції лінії перетину визначить побудова.

2. Оскільки нам відомо, що лінія перетину є багатокутником, переходимо до її побудови, використовуючи спосіб ребер. Будуємо вершини багатокутника як точки перетину площини з ребрами поверхні тіла. Враховуємо при цьому, що побудова проекцій відбувається по фактично вже заданій одній проекції цієї лінії (проекції, на якій задана слід-проекція січної площини).

3. З'єднуємо отримані вершини багатокутника з урахуванням видимості. Сторони багатокутника будуть видимі, якщо вони належать до видимих граней, та невидимі, якщо вони належать до невидимих граней.

4. Будуємо натуральну величину фігури перерізу за допомогою метода заміни площин проекцій. Приклади побудови:

Задача. Побудувати проекції лінії перетину похилої трикутної призми з проекціюючою площиною ($\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\Sigma}_1)$ і натуральну величину фігури перерізу.

Розв'язання. Задача розв'язується за вищенаведеним алгоритмом.

1. Форма лінії перетину є трикутник.
2. Вершини трикутника - точки перетину ребер з $\boldsymbol{\Sigma}$: *1-2-3*.
3. В Π_1 трикутник *1-2-3* $\Rightarrow$ видимий відрізок прямої. В Π_2 грань *AA'BB'* - невидима, тому сторону 1_2-2_2, трикутника 1_2-2_2-3_2, яка лежить на цій грані, наводимо штриховою лінією.
4. Методом заміни площин проекцій будуємо натуральну величину фігури перерізу $1_4 2_4 3_4$ (рис. 7.2.1).

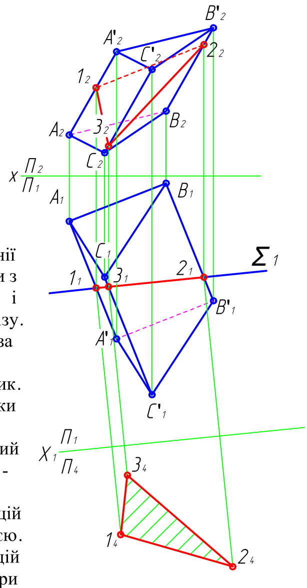


Рис. 7.2.1

Самостійна робота.

Задачі 1-6.

Побудувати три проекції лінії перетину заданої поверхні площиною і знайти натуральну величину фігури перерізу.

Задача 1.

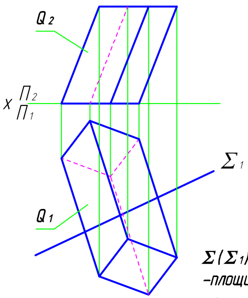


Рис. 7.2.2

$\Sigma(\Sigma_1)$ –площина

$Q(Q_1; Q_2)$ –призма

Задача 2.

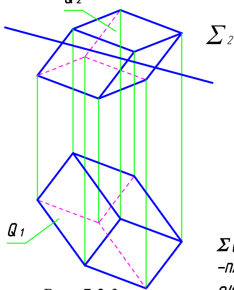


Рис. 7.2.3

$\Sigma(\Sigma_2)$ –площина

$Q(Q_1; Q_2)$ –призма

Задача 3.

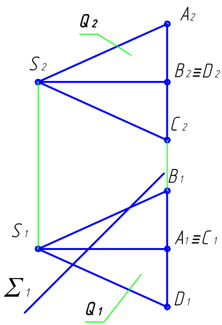


Рис. 7.2.4

$\Sigma(\Sigma_1)$ –площина

$Q(Q_1; Q_2)$ –піраміда

Задача 4.

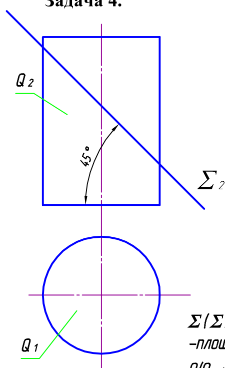


Рис. 7.2.5

$\Sigma(\Sigma_2)$ –площина

$Q(Q_1; Q_2)$ –циліндр

Задача 5.

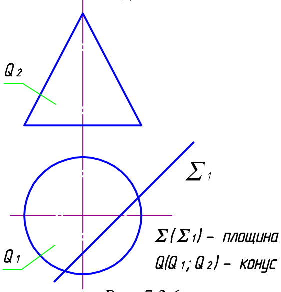


Рис. 7.2.6

Задача 6.

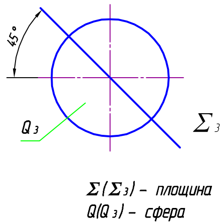


Рис. 7.2.7

Задача 7.

Побудувати проекції лінії перетину піраміди площиною загального положення $\Theta(f \cap h)$ і знайти натуральну велечину фігури перерізу (рис. 7.2.8).

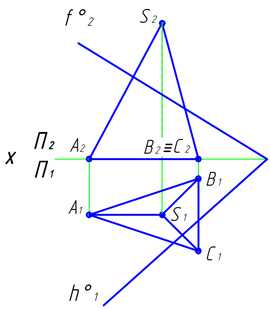
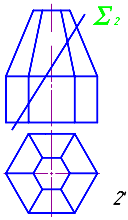


Рис. 7.2.8

7.3 Перетин поверхні гранного тіла складеної форми з проекцюючою площиною. Побудова натуральної величини фігури перерізу.

Задача 8. (рис. 7.3.1): Задана складена поверхня гранного тіла, яка складається з поверхні зрізаної піраміди та призми. Площина перетину є фронтально-проекцюючою ($\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\Sigma}_2)$). Побудувати проекції лінії перетину і натуральну величину фігури перерізу.



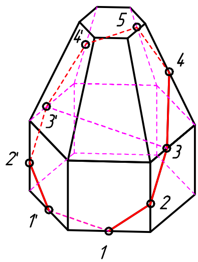


Рис. 7.3.1

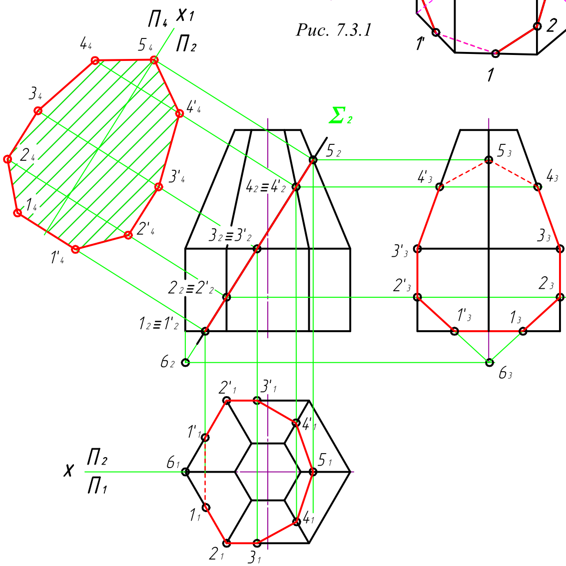


Рис. 7.3.2

Алгоритм побудови:

1. Поверхня є складеною і складається з правильної зрізаної шестикутної піраміди та правильної шестигранної призми. Ці поверхні мають одну спільну основу та спільну вертикальну вісь.

Площина $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\Sigma}_2)$ перетинає бокову поверхню піраміди (частково) та її нижню основу, а також обидві основи призми та її бічну поверхню (частково). Виходячи з графічного завдання робимо висновок про те, що піраміда перетинається по п'ятикутнику, а призма по шестикутнику.

2. Будуємо лінію перетину починаючи з фронтальної проекції. Для цього використовуємо правило належності точки до площини $\boldsymbol{\Sigma}$. Послідовність побудови:

1_2 -1_1 -1_3,

$1'_2$ - $1'_1$ -$1'_3$.

1_3, $1'_3$ будуємо координатним методом відкладаючи координату для 1_3 та для $1'_3$.

З'єднуємо точки *1-1'*, оскільки вони належать до однієї грані (нижньої основи призми). З'єднання виконуємо з урахуванням видимості: лінія *1 - 1'* - фронтально-проекцююча, на Π_2 її проекцією є точка, на Π_1 - відрізок 1_1 - $1'_1$, а на Π_3 - відрізок 1_3 - $1'_3$.

Для фронтальної та профільної проекції задача видимості не має сенсу, тобто нижня грань призми проекцюється на Π_2 та Π_3 у відрізок прямої. Горизонтальна проекція виконується штриховою лінією, тобто нижня грань на Π_1 є невидимою.

Далі будуємо точки *2 - 2'*, *3 - 3'*, *4 - 4'*, *5* і з'єднуємо точки, що належать до однієї грані між собою відповідними відрізками прямих
(рис. 7.3.2).

В результаті виконаних побудов отримуємо пласку ламану *1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 4' - 3' - 2' - 1' - 1.*

Для побудови натуральної величини фігури перерізу використовуємо метод заміни площин проекцій.

Для цього проводимо вісь x_1, системи Π_2 / Π_4 паралельно до слід-проекції площини $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\Sigma}_2)$.

Далі відкладаємо координати $\boldsymbol{y}$ відповідних точок лінії перерізу та отримуємо натуральну величину.

Задача 9 (рис. 7.3.3). Задано геометричне тіло, яке складається зі зрізаного конуса та призми. Січна площина $\Sigma(\Sigma_2)$ - фронтально-проекцююча. Треба побудувати лінію перетину та натуральну величину фігури перерізу. Σ паралельна твірній конуса.

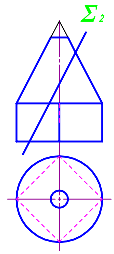


Рис. 7.3.3

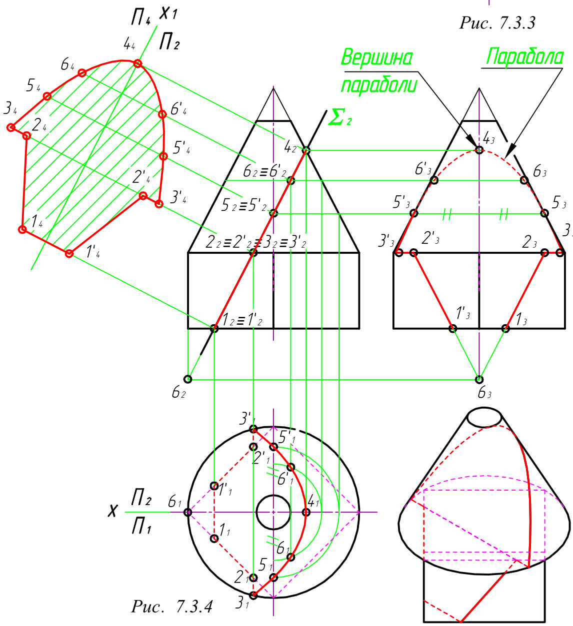


Рис. 7.3.4

Алгоритм побудови:

1. Досліджуючи графічну умову задачі робимо висновок про те, що поверхня тіла складається з поверхні зрізаного конуса та чотиригранної призми. В основі призми лежить квадрат. Поверхні співосні.

Площина $\Sigma(\Sigma_2)$ перетинає бокову поверхню зрізаного конуса (частково) та його основу, а також бокову поверхню призми (частково) та її обидві основи.

Оскільки $\Sigma(\Sigma_2)$ паралельна твірній конічної поверхні, то перетином бокової поверхні площиною буде парабола; основа перетнеться по відрізку прямої.

Перетином площини Σ з призмою буде трапеція. Таким чином лінія перетину площин Σ з поверхнею тіла буде складатися з параболи і трапеції.

2. Будуємо лінію перетину. Починаємо з перетину призми.

Лінію перетину будуємо способом ребер. Будуємо точки *1 - 1′, 2 - 2′*. Після цього з'єднуємо їх з урахуванням видимості (рис. 7.3.4).

Після цього будуємо лінію перетину з конічною поверхнею. Починаємо з найбільшої хорди - точки *3 - 3′*. Далі будуємо вершину параболи - точка *4*. Важливими точками перетину є точки *5 - 5′*, тобто вони належать до профільного обрису конічної поверхні і визначають видимість лінії на Π_3. Точки *5 - 5′* будуємо за умови їх належності до профільного обрису. Послідовність побудови: $5_2 - 5_3 - 5_1$, $5'_2 - 5'_3 - 5'_1$.

Проекції 5_1, $5'_1$ будуємо координатним методом.

Для уточнення форми лінії між точками *4-5-5′* будуємо проміжні точки *6 - 6*'. Побудову виконуємо за загальною методикою: проведемо коло через довільно обрані точки *6 - 6′* і на проекціях цього кола будуємо проекції точок *6 - 6′*.

3. З'єднуємо отримані точки *1 - 2 - 3 - 5 - 6 - 4 - 6′ - 5 ′- 3′ - 2 ′- 1′ враховуючи те, що ділянки між точками 5′ - 6′ - 4 - 6 - 5; 3′ - 2′; 2 -3; 1′-1* є невидимими.

4. Натуральну величину фігури перерізу будуємо методом заміни площин проекцій аналогічно попередній задачі.

Задача 10 (рис. 7.3.5). Цей приклад відноситься до третьої основної задачі. Коли лінії перетинів є криві лінії.

Умова: побудувати лінію перетину $\Sigma(\Sigma_2)$ з поверхнею геометричного тіла, яка складається з двох конічних поверхонь. Σ паралельна твірній ніжнього конуса.

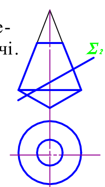


Рис. 7.3.5

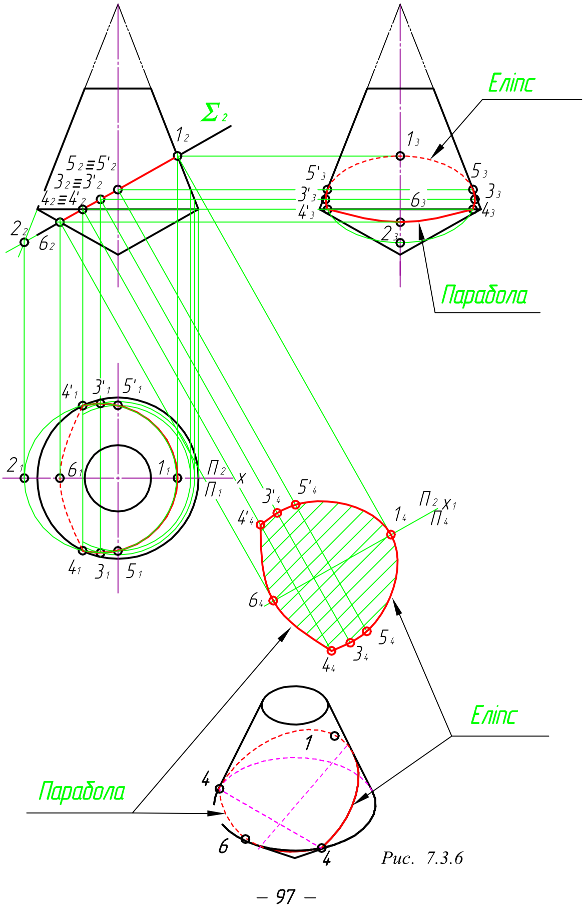


Рис. 7.3.6

1. Виходячи з графічної умови задачі, робимо висновок про те, що задані співвісні конічні поверхні мають спільну основу. Поверхня зрізаного конуса перетинається по частині еліпса, а поверхня повного конуса - по параболі. Таким чином лінія перетину поверхні геометричного тіла площиною $\boldsymbol{\Sigma}$ складається з двох ліній - еліпса та параболи.

2. Побудову проекцій лінії перетину почнемо зі зрізаного конуса. Спочатку побудуємо характерні точки лінії перетину. До них належать, перш за все, екстремальні точки та точки обрисів - це точки великої та малої осей еліпса, і точки вершини і найбільшої хорди для параболи.

Починаємо побудову з точок осей еліпса. Це точки *1 - 2, 3 - 3′*.

Точки *4 - 4′* належать спільної основі конусів. *5 -5′* - точки, які визначають видимість еліпсу в Π_3. Таким чином лінія перетину повного конуса площиною - це лінія, яка проходить через точки *4-3-5-1-5′-3′-4′*.

Переходимо до побудови лінії перетину площини $\boldsymbol{\Sigma}$ з поверхнею повного конуса. Нам відомо, що це парабола. Точка *6* - вершина параболи, *4 - 4′* - хорда. Очевидно, що точки *4 - 4′* спільні для обох перетинів.

3. З'єднуємо отримані точки перетинів з урахуванням видимості ліній (рис. 7.3.6).

Задача 11 (рис. 7.3.7). На відміну від попередніх прикладів в даному випадку задана поверхня геометричного тіла, основою якої є паралелепіпед, з двома симетричними пазами, а площина $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\Sigma}_1)$ є горизонтально-проекцюючою.

Побудова виконується за попередньо розглянутою методикою.

Побудову лінії перетину бажано починати з визначення системи координатних осей *x, y, z* для більш наочної побудови точок лінії перетину (рис. 7.3.8).

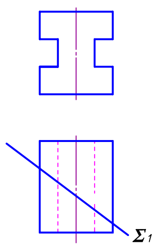
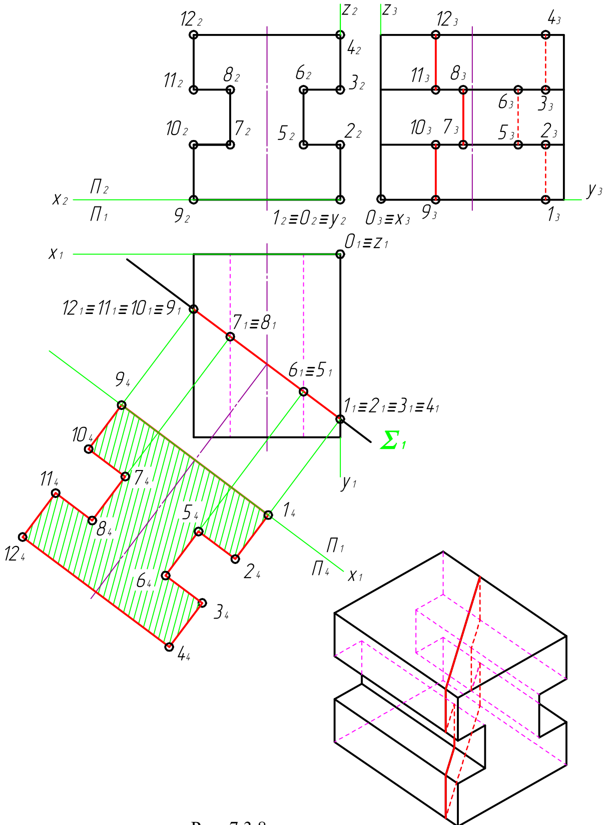


Рис. 7.3.7



12_2
z_2
z_3
12_3
4_3
4_2
11_2
8_2
6_2
3_2
11_3
8_3
6_3
3_3
10_2
7_2
5_2
2_2
10_3
7_3
5_3
2_3
x_2
Π_2
Π_1
9_2
$1_2 \equiv 0_2 \equiv y_2$
$0_3 \equiv x_3$
9_3
1_3
y_3
x_1
$0_1 \equiv z_1$
$12_1 \equiv 11_1 \equiv 10_1 \equiv 9_1$
$7_1 \equiv 8_1$
$6_1 \equiv 5_1$
9_4
$1_1 \equiv 2_1 \equiv 3_1 \equiv 4_1$
10_4
Σ_1
7_4
y_1
11_4
1_4
5_4
8_4
12_4
Π_1
Π_4
x_1
2_4
6_4
3_4
4_4

Рис. 7.3.8

Задача 12. В цьому прикладі задано гранну поверхню з отвором. При його розв`язанні слід враховувати, що існують дві принципово різні поверхні - поверхня тіла та поверхня отвору. Відповідно і переріз поверхні тіла в цілому буде складатись з перетину поверхні тіла та отвору. Зокрема, в запропонованому прикладі переріз складається з трьох частин *A*, *B*, *C*. *A* та *C* належать тілу, а *B* - отвору.

Точки ліній перетину будуємо способом ребер. З'єднуємо точки з урахуванням видимості.

Задача полягає в побудові третьої проекції геометричного тіла за заданими двома проекціями та побудові перерізу площиною ***Σ*** (рис. 7.3.9-7.3.11).

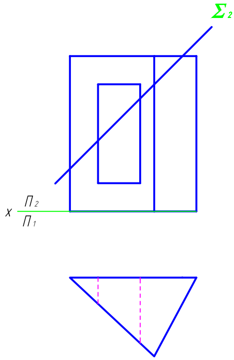


Рис. 7.3.9

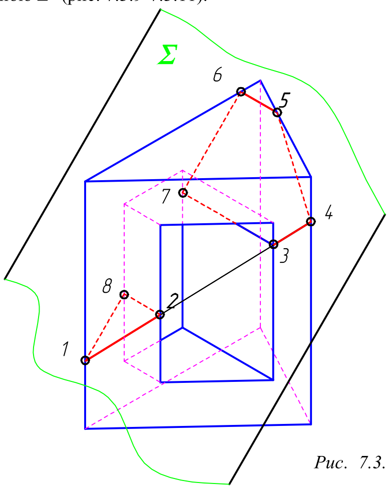


Рис. 7.3.10

Натуральну величину фігури перерізу будуємо за допомогою заміни площин проекцій; причому $\Pi_4 \| \Sigma(\Sigma_2)$.

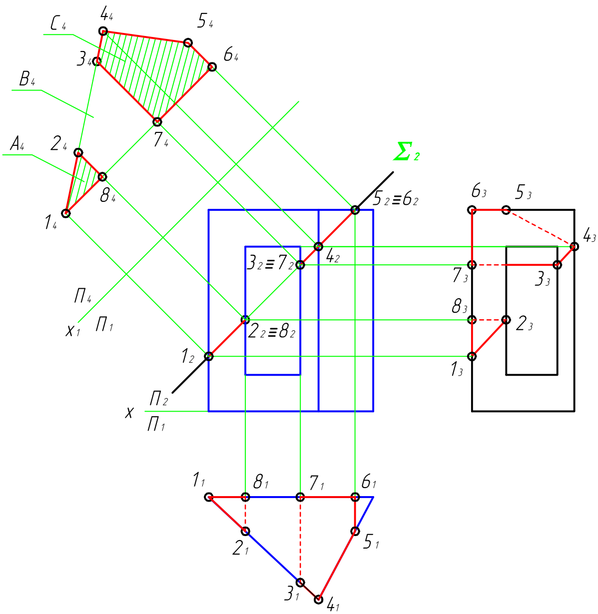


Рис. 7.3.11

7.4 Січна площина займає загальне положення у просторі

В цьому випадку є доцільним перетворення площини загального положення у площину проекцуюючу. Такий підхід до вирішення задачі дозволяє встановити характер перетину та спрогнозувати форму лінії перетину. Якщо форма поверхні достатньо складна і складно перетворюється, то задачу вирішують без перетворення січної площини, за допомогою метода посередників (площин або поверхонь). Розглянемо приклади розв'язання задачі за допомогою метода перетворення площин проекцій.

Задача 13. Задані прямий круговий конус та площина $\Sigma(n \cap m)$. Побудувати лінію перетину (рис. 7.4.1).

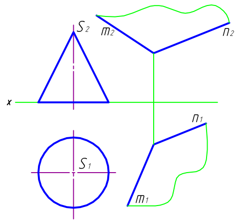


Рис. 7.4.1

Алгоритм розв`язання задачі

1. Досліджуємо графічну умову задачі. Задано прямий круговий конус, основа якого розташована в площині Π_1. Січна площина є площиною загального положення і задана двома прямими, що перетинаються n та m. Взаємне розташування конуса та площини не є очевидним. Встановити форму лінії перетину виходячи з графічної умови практично неможливо. Для з'ясування характеру перетину виконуємо перетворення січної площини у проекцюючу.

2. Перетворюємо площину Σ у проекцюючу. Для цього будуємо горизонталь h в площині Σ і проводимо вісь нової системи $x_1 \perp h_1$:

$$x\,\frac{\Pi_2}{\Pi_1} \longrightarrow x_1\frac{\Pi_1}{\Pi_4};\ x_1 \perp h_1;\ \ \Pi_4 \perp \Pi_4;\ \ \Sigma \perp \Pi_4.$$

Проекція конуса на Π_4 має вигляд, зображений на рис. 7.4.2.

Виконавши перетворення площини та побудувавши проекцію конуса в Π_4 встановлюємо характер перетину. Виходячи з графічних побудов робимо висновок про те, що січна площина перетинає частково бокову поверхню конуса та його основу. Оскільки кут нахилу площини до осі конуса більше кута нахилу твірної конуса до осі, то лінією перетину буде еліпс. Причому він буде не повним, оскільки площина перетинає бокову поверхню конуса частково.

3. Визначаємо форму проекцій лінії перетину. В Π_4 - відрізок прямої; в Π_1 та Π_2 - частина еліпса.

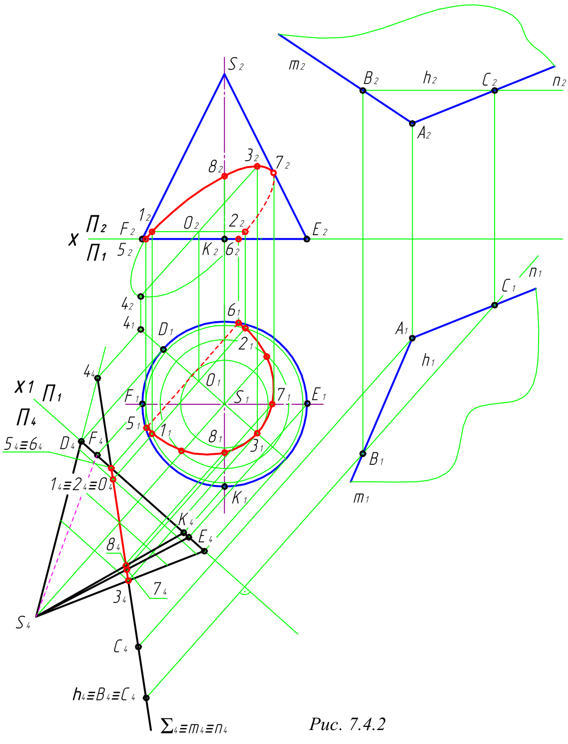

S 2
m2
B2
h2
C2
n2
A2
8 2
3 2
7 2
1 2
П2
F 2
O 2
2 2
E 2
X
П1
5 2
K 2
6 2
n1
C 1
4 2
6 1
4 1
D 1
A1
2 1
h1
4 4
O 1
X1
П1
F 1
S 1
7 1
E 1
П4
5 1
1 1
8 1
3 1
5 4≡6 4
D 4
F 4
B 1
1 4≡2 4≡O 4
K 1
m1
K 4
E 4
8 4
7 4
3 4
S 4
C 4
h4≡B4≡C 4
∑4≡m4≡n4

Рис. 7.4.2

4. Будуємо проекції лінії перетину. Спочатку виконуємо побудову горизонтальної проекції лінії перетину в системі Π_4 / Π_1, а потім будуємо її фронтальну проекцію використовуючи правила заміни площин проекцій. Побудову еліпса на Π_1 починаємо з побудови його центру та точок малої та великої осей. Центр еліпса точка O - це середина відрізку $3 - 4$ з відповідними проекціями O_4 та O_1.

Мала вісь визначається точками 1 і 2, а велика - точками $3, 4$.

Проекції осей $1_1 - 2_1$; $3_1 - 4_1$ оскільки мала вісь перпендикулярна до Π_4 також є горизонталлю площини Σ, а велика вісь перпендикулярна до малої.

Фронтальні проекції малої та великої осей відповідно $1_2 - 2_2$; $3_2 - 4_2$ не є взаємоперпендикулярними і проекцюються на Π_2 як спряжені діаметри еліпса - проекції. Якщо треба побудувати осі еліпса для проекції Π_2 необхідно це зробити за спряженими діаметрами або зробивши перетворення Σ у проекцюючу за допомогою фронталі.

Після побудови характерних точок еліпса переходимо до побудови інших характерних точок - точок на обрисах, які поділяють лінії перерізу на видиму та невидиму частину *5, 6, 7, 8.*

4. Для уточнення форми проекцій лінії перетину будують проміжні точки. В даному випадку кількість точок достатня, тому проміжні точки будувати не будемо.

5. З'єднуємо отримані точки лінії перетину з урахуванням їх видимості.

На площині проекцій Π_4 задача на визначення видимості не має сенсу.

В Π_2 частина лінії, яка визначається проекціями точок $5 - 1 - 8 - 3 - 7$ є видимою, а частина між точками $7 - 2 - 6$ - невидима.

8. ЗОБРАЖЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНОГО ТІЛА

8.1 Зображення геометричного тіла з одним отвором

Узагальненим алгоритмом розв'язання таких задач є алгоритм, який містить виконання двох задач, перша - дослідження форми поверхні та взаємного розташування поверхні і отвору. Друга побудова лінії перетину поверхні тіла з поверхнею отвору.

Наведемо приклади таких побудов.

Задача 73. Задано п'ятикутну піраміду та горизонтальний отвір, який проекцюється на Π_2 у вигляді трикутника (рис. 8.1.1). Побудувати перетин поверхні отвору з пірамідою. Приклад побудови наведений на рис. 8.1.3

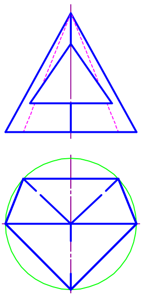


Рис. 8.1.1

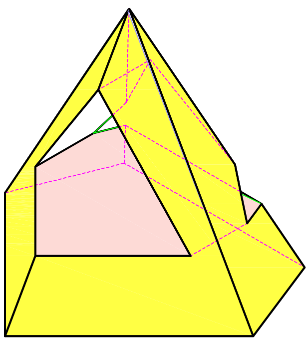


Рис. 8.1.2

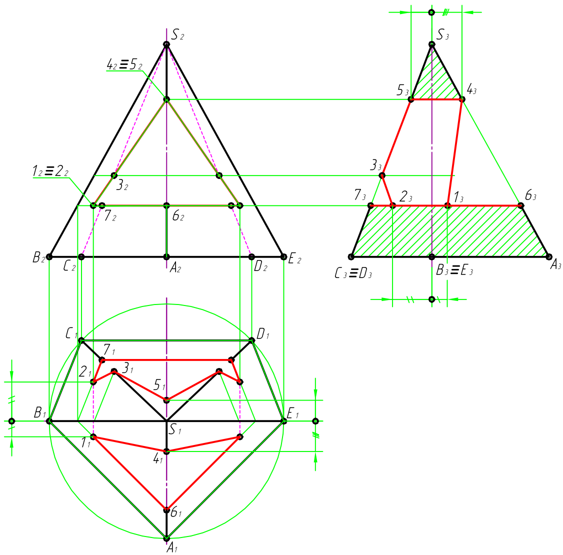

S 2
4 2 ≡ 5 2
1 2 ≡ 2 2
3 2
7 2
6 2
B 2
C 2
A 2
D 2
E 2
C 1
D 1
7 1
2 1
3 1
5 1
B 1
E 1
S 1
1 1
4 1
6 1
A 1
S 3
5 3
4 3
3 3
7 3
2 3
1 3
6 3
C 3 ≡ D 3
B 3 ≡ E 3
A 3

Рис. 8.1.3

Задача 2. Задано дві проекції зрізаної сфери, у якої є вертикальний отвір (рис.8.1.4). Необхідно побудувати перетин отвору з поверхнею тіла на трьох проекціях.

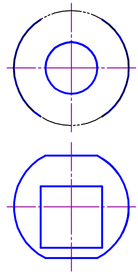


Рис 8.1.4

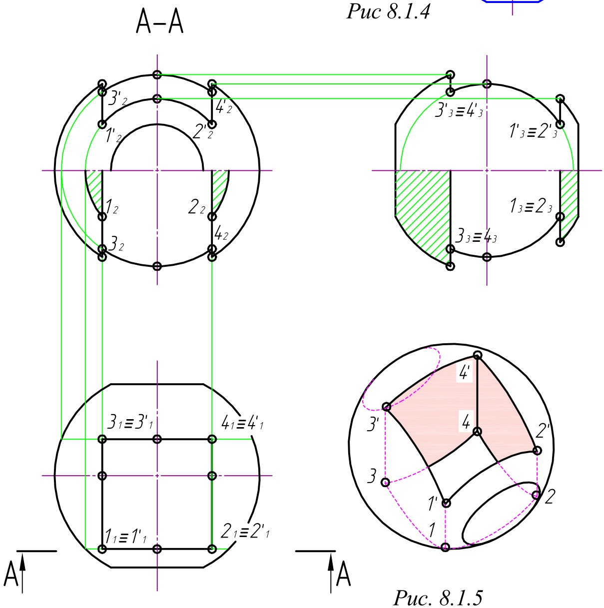


Рис. 8.1.5

Алгоритм побудови:

1. Будуємо третю проекцію поверхні тіла та отвору (рис. 8.1.5).

2. Задано дві проекції зрізаної сфери та вертикальний отвір. Оскільки поверхня тіла загально відома та визначена, то питання дослідження її форми практично є вирішеним. Отвір уявляє собою гранну форму і проекцюється на горизонтальну площину у вигляді квадрата. Поверхня тіла та поверхня отвору асиметричні. Виходячи з графічної умови задачі, є очевидним, що лінії перетину поверхні з лівою та правою гранями отвору будуть однаковими, оскільки вони симетричні відносно осі y.

3. Розв`язуємо задачу використовуючи метод повних перерізів. Нагадаємо, що суть методу полягає в тому, що ми по черзі заключаємо кожну грань вікна у площину окремого положення. Знаходимо лінії перетину їх з поверхнею і обмежуємо її точками отвору.

Оскільки грані отвору є відсіками площин рівня, то лініями їх перетину з поверхнею тіла будуть частини кіл.

Почнемо з передньої грані отвору. Заключаємо її в площину і будуємо лінію перетину. Проекціями лінії перетину на $П_1$ буде відрізок прямої, на $П_2$ - коло, на $П_3$ - також відрізок прямої.

Обмежуємо лінію точками отвору *1-2* та *1'-2'*. Частина кола, яка розташована між цими точками і буде лінією перетину передньої грані отвору з поверхнею тіла.

Далі заключаємо задню грань отвору у площину та будуємо лінію перетину її з поверхнею тіла.

Побудову виконуємо аналогічно і отримуємо частини кола між точками *3-4* та *3'-4'*.

Застосувавши метод повних перерізів до лівої та правої граней отвору отримаємо лінії 1-3; 1'-3' та 2-4; 2'-4'. Точки 1, 3 та 2, 4 є спільними для відповідних перетинів.

4. Для розкриття внутрішньої побудови тіла будуємо розрізи. Доцільними розрізами в цій задачі є фронтальний та профільний. Робити горизонтальний розріз немає сенсу, оскільки він нічого не розкриває. Фронтальний розріз А-А є симетричним і виконується як напіввид і напіврозріз.

На виді зліва виконуємо вертикальний профільний розріз, який поєднуємо з видом, внаслідок симетричності (рис.8.1.5).

Задача 3. Задано дві проекції прямого кругового конуса з горизонтальним отвором (рис.8.1.6). Побудувати перетин конуса з отвором.

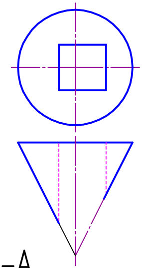


Рис. 8.1.6

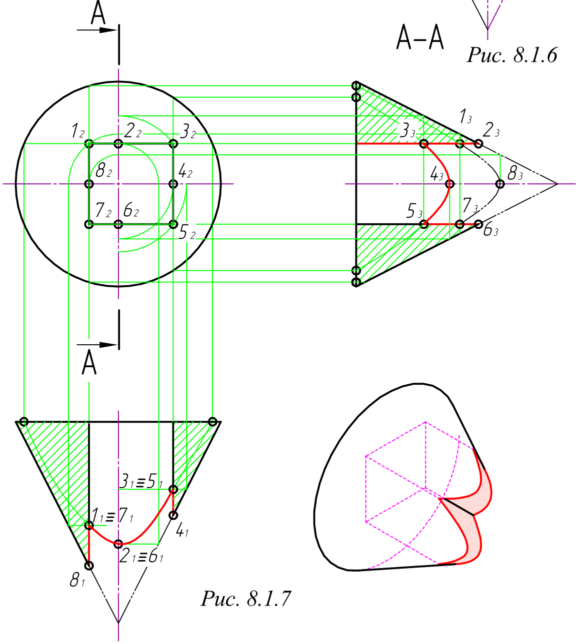


Рис. 8.1.7

Поставлена задача схожа на попередню за алгоритмом розв'язання. Метод її розв'язання такий самий: метод повних перерізів.

Досліджуючи форму поверхні тіла і взаємне розташування поверхні та отвору, приходимо до висновку про те, що тіло та отвір асиметричні. Отвір має гранну форму. Загально відомо, що лінією перетину конічної поверхні з площиною, яка паралельна до двох твірних, буде гіпербола.

Таким чином суттю задачі є побудова чотирьох гіпербол.

Будувати гіперболи будемо починаючи з їх характерних точок. Це точки вершин та точки найбільших хорд. Побудова аксонометричного зображення моделі з отвором наведена на рис. 8.1.7.

Тіла складеної геометричної форми умовно можна поділити на тіла, які мають складну зовнішню будову і не мають внутрішньої будови, та тіла, які окрім складеної зовнішньої будови містять отвори різної форми або порожнини.

З точки зору постанови задачі побудова зображення геометричного тіла складеної форми є комплексною задачею. Вона поєднує в собі такі теми, як проекціювання поверхонь різної форми та побудову точки на поверхні, а також перетин геометричного тіла площиною.

Знання цих тем та вміння виконувати відповідні задачі є запорукою правильного виконання поставленої задачі.

Більш складними випадками зображення геометричного тіла з отвором є геометричне тіло, поверхня якого складається з поверхонь різного виду та наскрізних отворів різної форми.

8.2 Зображення геометричного тіла складеної форми з одним отвором.

Розглянемо можливі випадки задач 4-6 зображення геометричного тіла складеної форми.

Наприклад, поверхня тіла складається з циліндра та призми (рис. 8.2.1), циліндричної та конічної поверхонь (рис.8.2.2), призми та сферичної поверхні (рис. 8.2.3) тощо.

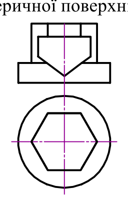


Рис. 8.2.1

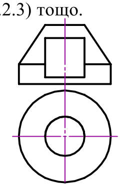


Рис. 8.2.2

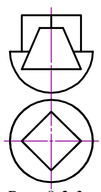


Рис. 8.2.3

У цих випадках задачу слід розв'язувати послідовно. Спочатку будувати перетин отвору з однією з поверхонь, а потім з другою. Після цього необхідно перевірити наявність та побудову спільних точок ліній перетину, які належать до спільних основ або між поверхнями.

Приклади розв'язання цих задач наведені на рис. 8.2.4, 8.2.5, 8.2.6.

Задача 4.

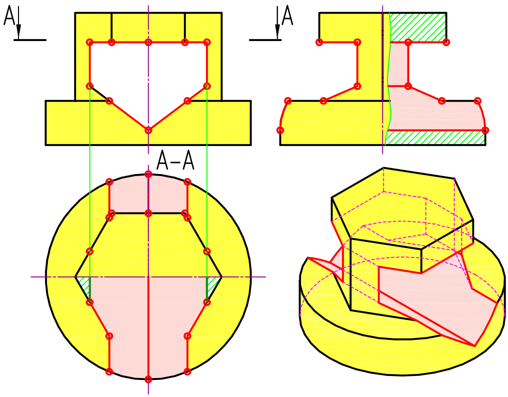


Рис. 8.2.4

Задача 5.

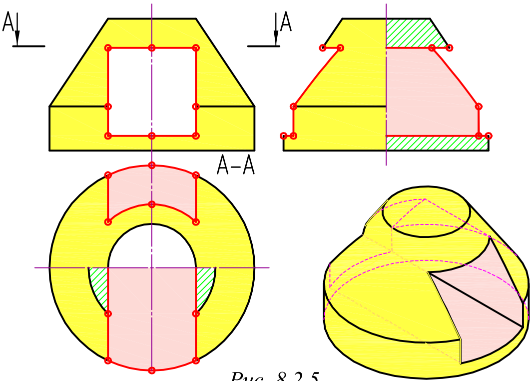


Рис. 8.2.5

Задача 6.

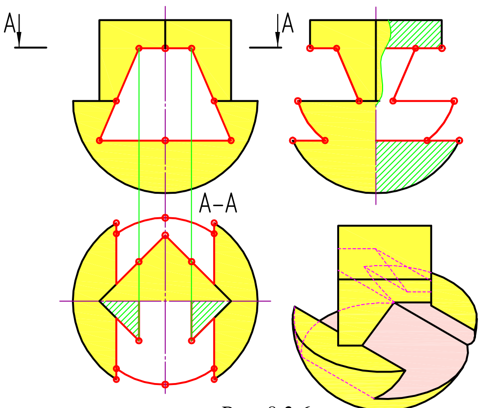
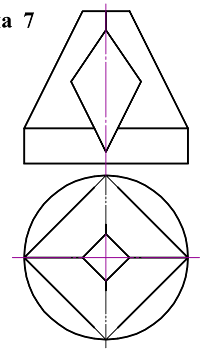


Рис. 8.2.6

Самостійна робота

Умова до задач 7-13: Дано дві проекції складеного геометричного тіла з одним отвором (рис. 8.2.7 - 8.2.13). Побудувати вид зліва геометричного тіла, лінію перетину складеного геометричного тіла з отвором і виконати необхідні розрізи.

Задача 7



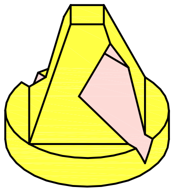
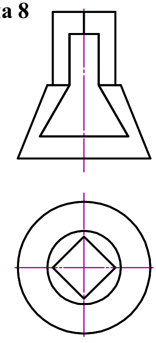


Рис. 8.2.7

Задача 8



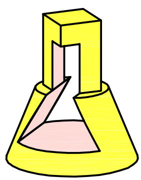
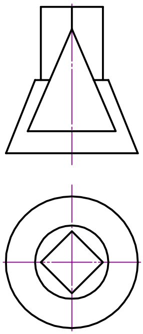


Рис. 8.2.8

Задача 9



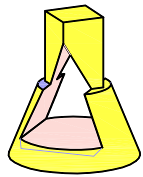


Рис. 8.2.9

Задача 10

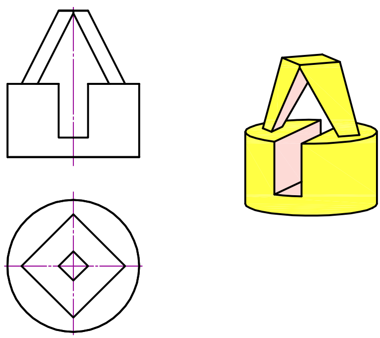
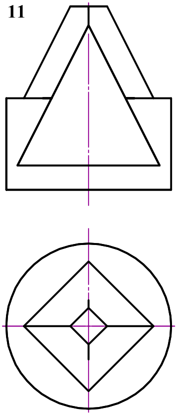


Рис. 8.2.10

Задача 11



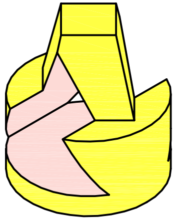
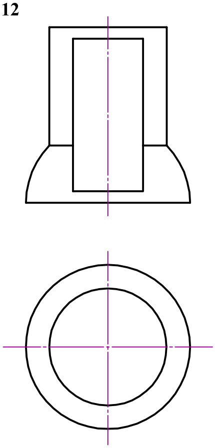


Рис. 8.2.11

Задача 12



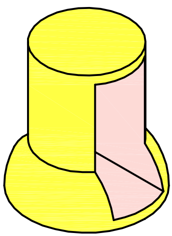


Рис. 8.2.12

Задача 13

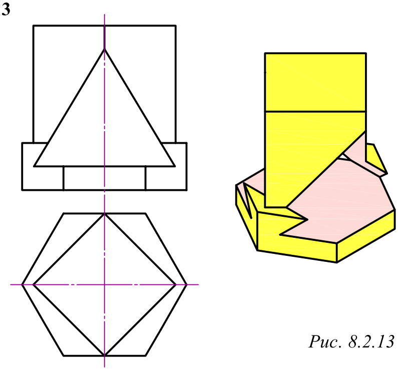


Рис. 8.2.13

8.3 Зображення геометричного тіла складеної форми з несиметричним пазом.

Умова до задач 14-17: Дано дві проекції складеного геометричного тіла з асиметричним пазом (рис. 8.3.1-8.3.3). Побудувати вид зліва геометричного тіла, лінію перетину геометричного тіла з пазом.

Задача 14

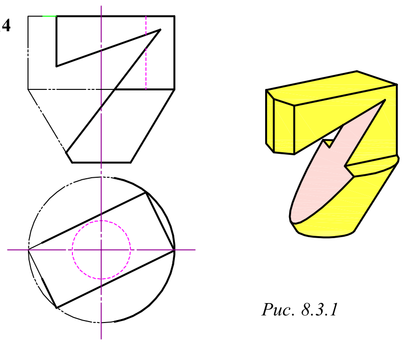
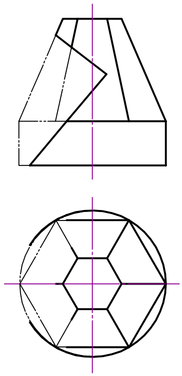


Рис. 8.3.1

Задача 15



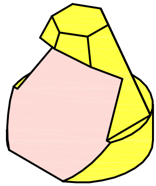
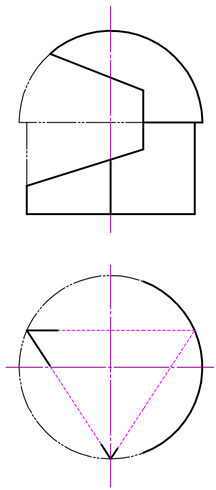


Рис. 8.3.2

Задача 16



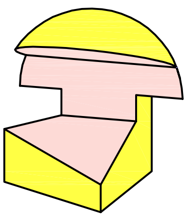


Рис. 8.3.3

Задача 17. Дано дві проекції складеного геометричного тіла з асиметричними зрізами (рис. 8.3.4). Побудувати вид зліва геометричного тіла, лінію перетину геометричного тіла зі зрізами.

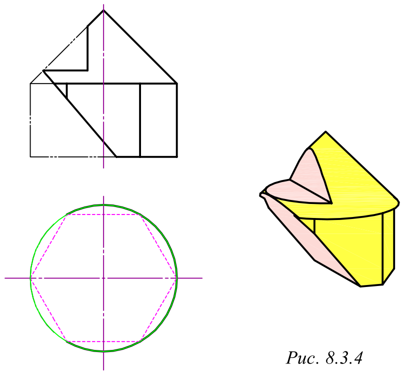


Рис. 8.3.4

8.4 Зображення геометричного тіла з двома отворами

Переважна більшість таких задач містять геометричні тіла з вертикальним та горизонтальним отворами. Такі задачі мають ще одну назву - подвійне проникання тобто, горизонтальний отвір проникає поверхню геометричного тіла і перетинає вертикальний отвір. Горизонтальний отвір може бути розташований симетрично відносно вертикальної осі тіла або несиметрично. У деяких задачах замість горизонтального отвору можуть бути пази різної форми.

За своєю суттю побудова геометричного тіла з двома отворами поділяється на дві окремі задачі: зовнішню задачу та внутрішню. Зовнішня задача - це перетин горизонтального отвору або пазу з поверхнею тіла. Внутрішня - перетин горизонтального отвору або пазу з поверхнею вертикального отвору.

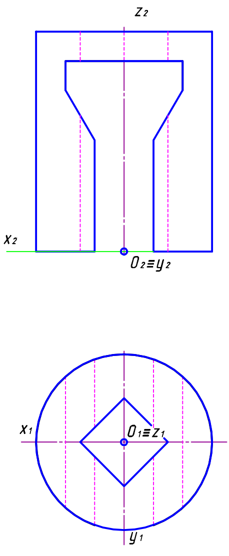


Рис. 8.4.1

Задача 18. Дано геометричне тіло, зовнішня поверхня якого - прямий круговий циліндр; внутрішня поверхня - чотиригранна призма. Циліндр і призма мають спільну вертикальну вісь. Геометричне тіло перетинається призматичним пазом. Побудувати: вид зліва геометричного тіла, лінії перетину геометричного тіла з призматичним пазом та виконати необхідні розрізи (рис. 8.4.1).

Розв'язання

Задача розв'язується за загальною методикою: спочатку розв'язуємо зовнішню задачу (рис. 8.4.2), а потім внутрішню (рис. 8.4.3). Після розв'язання обох задач виконуємо розрізи та поєднуємо задачі (рис. 8.4.4).

При виконанні задачі слід звернути увагу на симетрію паза. Симетрія паза суттєво спрощує побудову, оскільки можна розв'язати тільки половину задачі, а потім відобразити це рішення симетрично .

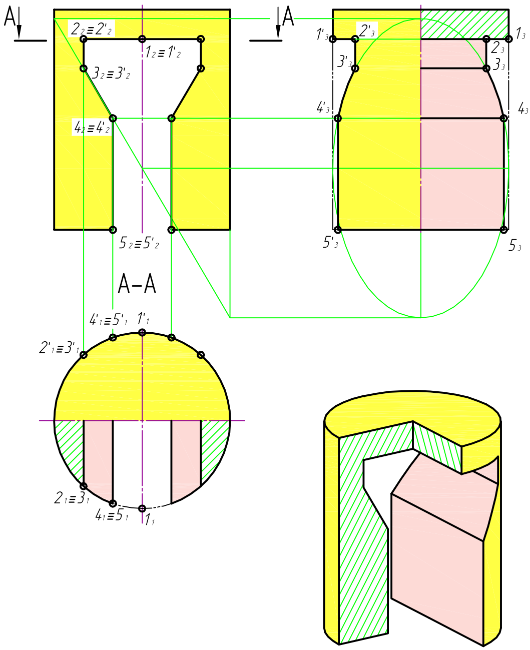

A
A
$2_2 \equiv 2'_2$
$1_2 \equiv 1'_2$
$3_2 \equiv 3'_2$
$4_2 \equiv 4'_2$
$5_2 \equiv 5'_2$
$1'_3$
$2'_3$
1_3
2_3
$3'_3$
3_3
$4'_3$
4_3
$5'_3$
5_3
A–A
$4'_1 \equiv 5'_1$
$1'_1$
$2'_1 \equiv 3'_1$
$2_1 \equiv 3_1$
$4_1 \equiv 5_1$
1_1

Рис. 8.4.2

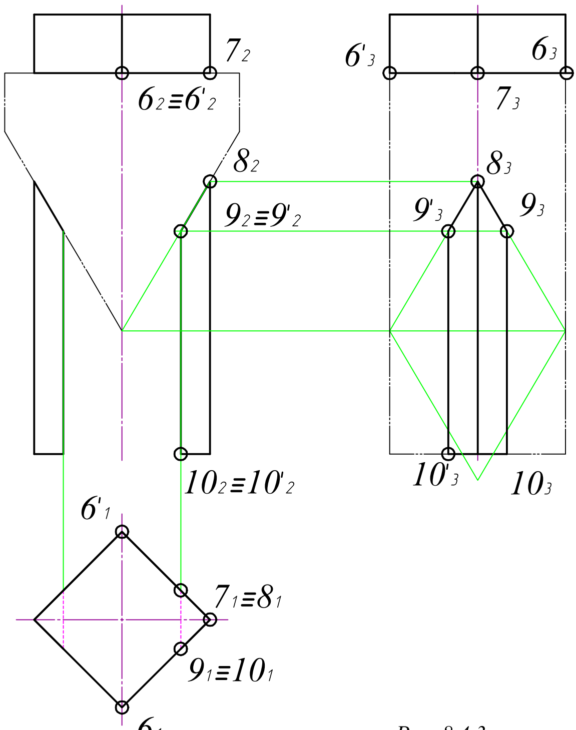


Рис. 8.4.3

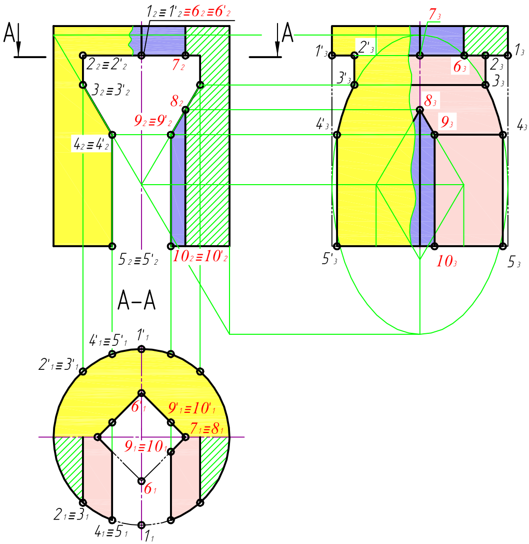

A
A
A–A
1₂≡1'₂≡6₂≡6'₂
2₂≡2'₂
3₂≡3'₂
4₂≡4'₂
5₂≡5'₂
7₂
8₂
9₂≡9'₂
10₂≡10'₂
7₃
1'₃
2'₃
3'₃
4'₃
5'₃
1₃
2₃
3₃
4₃
5₃
6₃
8₃
9₃
10₃
4'₁≡5'₁
1'₁
2'₁≡3'₁
6'₁
9'₁≡10'₁
7₁≡8₁
9₁≡10₁
6₁
2₁≡3₁
4₁≡5₁
1₁

Рис. 8.4.4

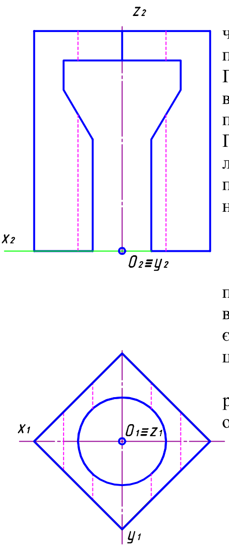


Рис. 8.4.5

Задача 19. Дано: правильна чотиригранна призма, внутрішня поверхня - прямий круговий циліндр. Призма і циліндр мають спільну вертикальну вісь. Геометричне тіло перетинається призматичним пазом. Побудувати вид зліва геометричного тіла, лінії перетину геометричного тіла з призматичним пазом та виконати необхідні розрізи (рис. 8.4.5).

Розв'язання

Ця задача розв'язується аналогічно попередній. Певний інтерес у цій задачі викликає те, що тепер гранною поверхнею є поверхня тіла, а отвір є круговим циліндром (рис. 8.4.6 - 8.4.8).

Бажано дослідити результати розв'язання обох задач і визначити відміну однієї від іншої.

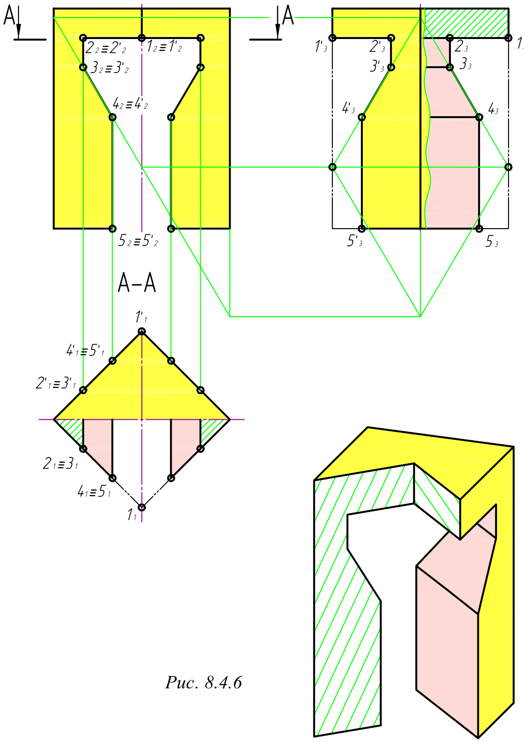
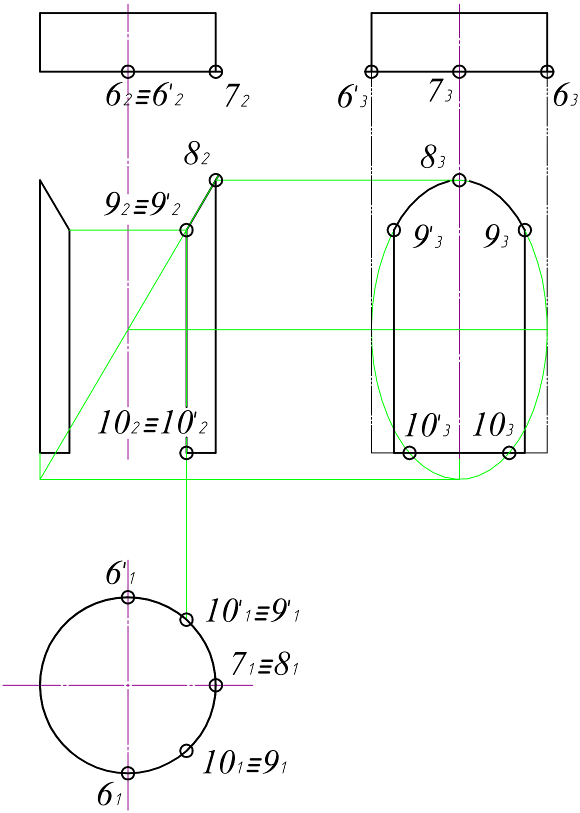

A
A
$2_2 \equiv 2'_2$
$1_2 \equiv 1'_2$
$3_2 \equiv 3'_2$
$4_2 \equiv 4'_2$
$5_2 \equiv 5'_2$
$1'_3$
$2'_3$
$3'_3$
$4'_3$
$5'_3$
2_3
1_3
3_3
4_3
5_3
A–A
$1'_1$
$4'_1 \equiv 5'_1$
$2'_1 \equiv 3'_1$
$2_1 \equiv 3_1$
$4_1 \equiv 5_1$
1_1

Рис. 8.4.6



$6_2 \equiv 6'_2$
7_2
$6'_3$
7_3
6_3
8_2
8_3
$9_2 \equiv 9'_2$
$9'_3$
9_3
$10_2 \equiv 10'_2$
$10'_3$
10_3
$6'_1$
$10'_1 \equiv 9'_1$
$7_1 \equiv 8_1$
$10_1 \equiv 9_1$
6_1

Рис. 8.4.7

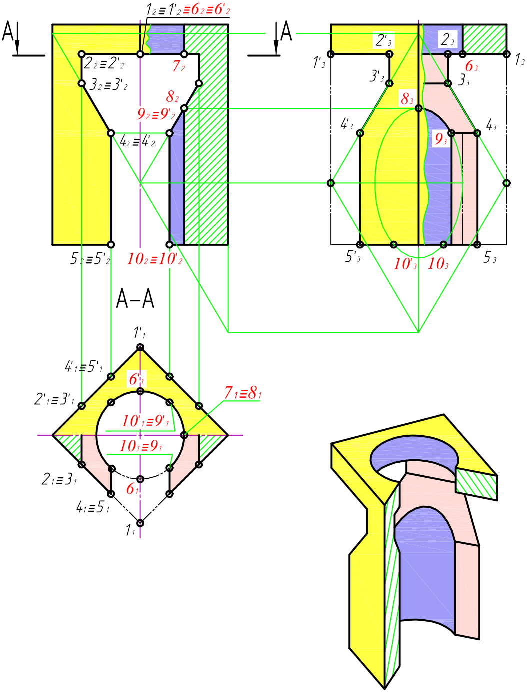

A
A
A–A
$1_2 \equiv 1'_2 \equiv 6_2 \equiv 6'_2$
$2_2 \equiv 2'_2$
$3_2 \equiv 3'_2$
7_2
8_2
$9_2 \equiv 9'_2$
$4_2 \equiv 4'_2$
$5_2 \equiv 5'_2$
$10_2 \equiv 10'_2$
$2'_3$
2_3
$1'_3$
1_3
$3'_3$
6_3
3_3
8_3
$4'_3$
4_3
9_3
$5'_3$
$10'_3$
10_3
5_3
$1'_1$
$4'_1 \equiv 5'_1$
$6'_1$
$7_1 \equiv 8_1$
$2'_1 \equiv 3'_1$
$10'_1 \equiv 9'_1$
$10_1 \equiv 9_1$
$2_1 \equiv 3_1$
6_1
$4_1 \equiv 5_1$
1_1

Рис. 8.4.8

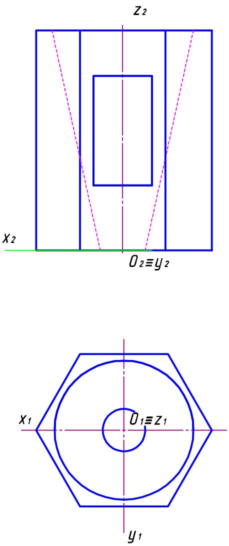


Рис. 8.4.9

Задача 20. Дано геометричне тіло, зовнішня поверхня якого - правильна шестигранна призма; внутрішня поверхня - зрізаний прямий круговий конус. Призма і конус мають спільну вертикальну вісь. Геометричне тіло перетинається наскрізь призматичним вікном, яке розташоване перпендикулярно до $П_2$ (рис. 8.4.9). Побудувати вид зліва геометричного тіла, лінії перетину геометричного тіла з призматичним вікном та виконати необхідні розрізи.

Розв'язання

Спочатку розв'язуємо зовнішню задачу (рис. 8.4.10, а потім внутрішню (рис. 8.4.11).

Розв'язуючи зовнішню задачу, бачимо, що горизонтальне вікно перетинає передню і задню грані шестигранника (рис. 8.4.12).

Розв'язуючи внутрішню задачу, звертаємо увагу на те, що конус перетинається двома вертикальними і паралельними між собою площинами вікна, які в перетині з конусом дадуть гіперболу. Верхня і нижня основи вікна паралельні основам конуса і в перетині з конусом дадуть два кола (рис. 8.4.13). З'єднуємо заздалегідь позначені точки *3*, *4*, *5*, *6* і симетричні їм. Внутрішню задачу розв'язано.

З'єднуємо розв'язання зовнішньої і внутрішньої задач. Враховуючи симетричні частини геометричного тіла виконуємо розрізи (рис. 8.4.14).

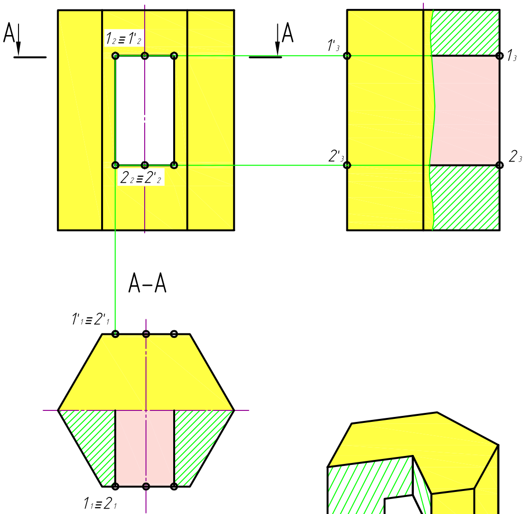
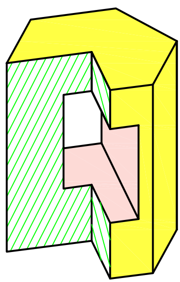
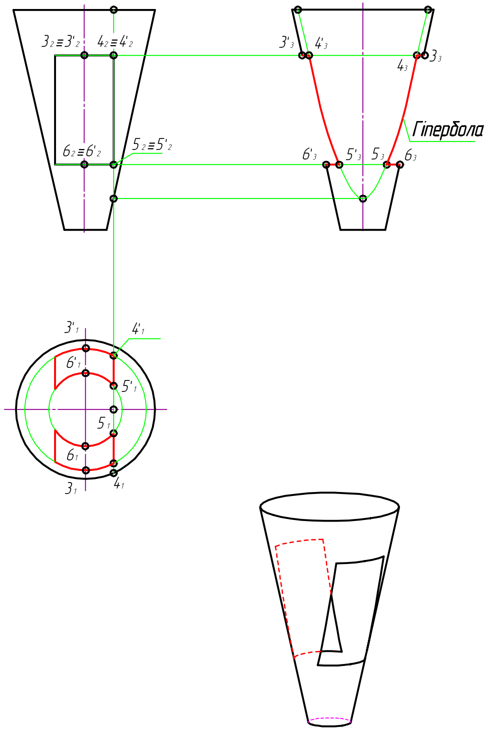


Рис. 8.4.15





3₂≡3'₂
4₂≡4'₂
5₂≡5'₂
6₂≡6'₂
3'₃
4'₃
3₃
4₃
Гіпербола
6'₃
5'₃
5₃
6₃
3'₁
4'₁
6'₁
5'₁
5₁
6₁
3₁
4₁

Рис. 8.4.16

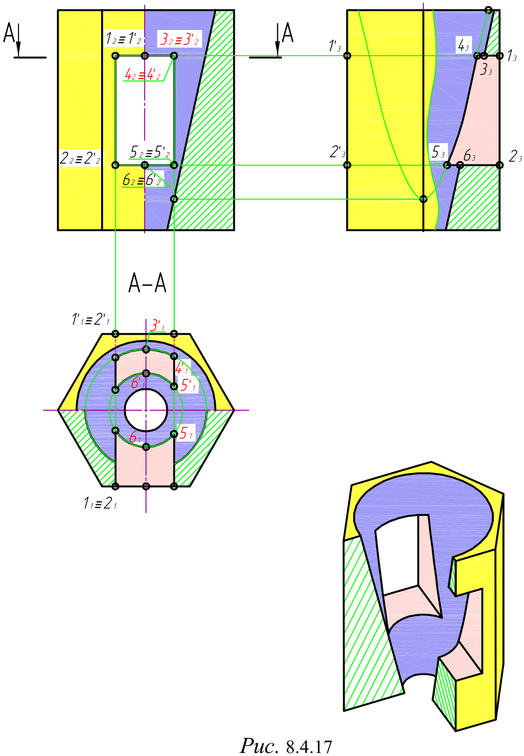

A
A
A–A
$1_2 \equiv 1'_2$
$3_2 \equiv 3'_2$
$4_2 \equiv 4'_2$
$2_2 \equiv 2'_2$
$5_2 \equiv 5'_2$
$6_2 \equiv 6'_2$
$1'_3$
4_3
1_3
3_3
$2'_3$
5_3
6_3
2_3
$1'_1 \equiv 2'_1$
$3'_1$
$4'_1$
$6'_1$
$5'_1$
6_1
5_1
$1_1 \equiv 2_1$

Рис. 8.4.17

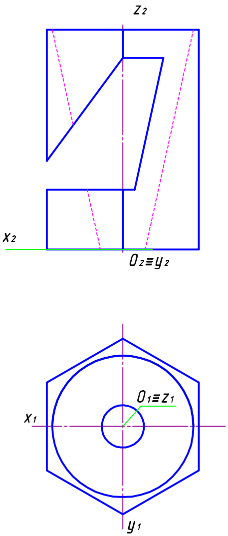


Рис. 8.4.18

Задача 21. Дано геометричне тіло, зовнішня поверхня якого - правильна шестигранна призма; внутрішня поверхня - зрізаний прямий круговий конус. Призма і конус мають спільну вертикальну вісь. Геометричне тіло перетинається призматичним пазом, який розташований перпендикулярно до $П_2$. Побудувати вид зліва геометричного тіла, лінії перетину геометричного тіла з призматичним пазом та виконати необхідні розрізи (рис 8.4.18).

Розв'язання

Як і попередні, задача розв'язується за зальною методикою: по-перше розв'язуємо зовнішню задачу (рис. 8.4.19), по-друге - внутрішню (рис. 8.4.20).

Проаналізуємо: а) паз (вікно) має форму незамкненої призми, яка перетинає шестигранну призму за ламаною незамкненою лінією, яка складається з відрізків прямих, це: *1-3-4-5-6-2* і *1'-3'-4'-5'-6'-2'* - ламаної лінії.

б) паз (вікно) перетинає конус. Кожна площина паза в перетині з конусом дає різні форми кривих. Площина, до якої належать точки *7* і *8*, дає неповний еліпс, площина з точками *9* і *10* - дві гілки параболи, а площини, до яких належать точки *8*, *9* та точки *10, 11, 12* дають два неповних кола. З'єднавши всі точки *7, 8, 9, 10, 11, 12* одержимо лінію перетину конуса з пазом.

На рис. 8.4.21 наведено кінцевий етап: об'єднуємо зовнішню і внутрішню задачі, виконуємо розрізи.

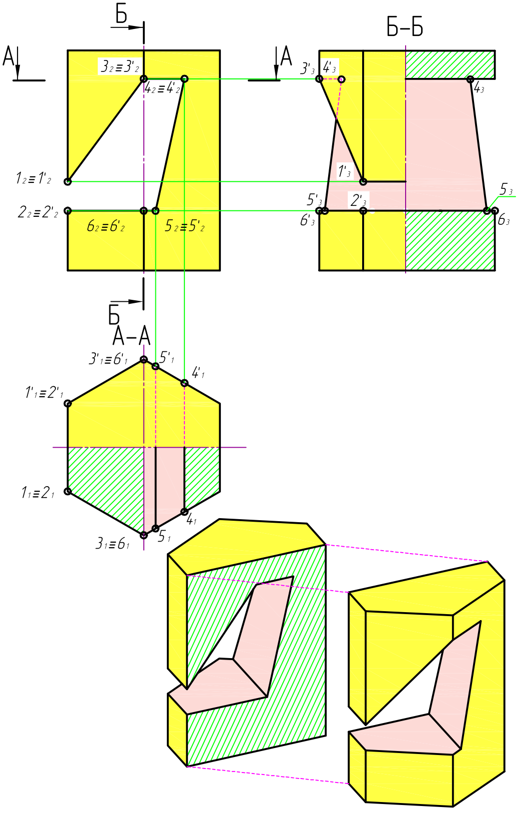

Б
Б–Б
А
А
3₂≡3'₂
4₂≡4'₂
1₂≡1'₂
2₂≡2'₂
6₂≡6'₂
5₂≡5'₂
3'₃
4'₃
4₃
1'₃
5'₃
2'₃
5₃
6'₃
6₃
Б
А–А
3'₁≡6'₁
5'₁
4'₁
1'₁≡2'₁
1₁≡2₁
4₁
5₁
3₁≡6₁

Рис. 8.4.19

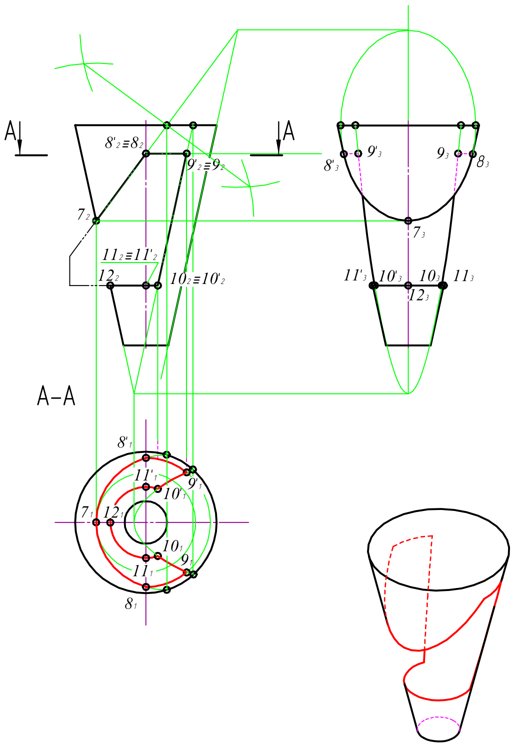

A
A
A–A
8'₂≡8₂
9'₂≡9₂
7₂
11₂≡11'₂
12₂
10₂≡10'₂
8'₃
9'₃
9₃
8₃
7₃
11'₃
10'₃
10₃
11₃
12₃
8'₁
11'₁
9'₁
10'₁
7₁
12₁
10₁
9₁
11₁
8₁

Рис. 8.4.20

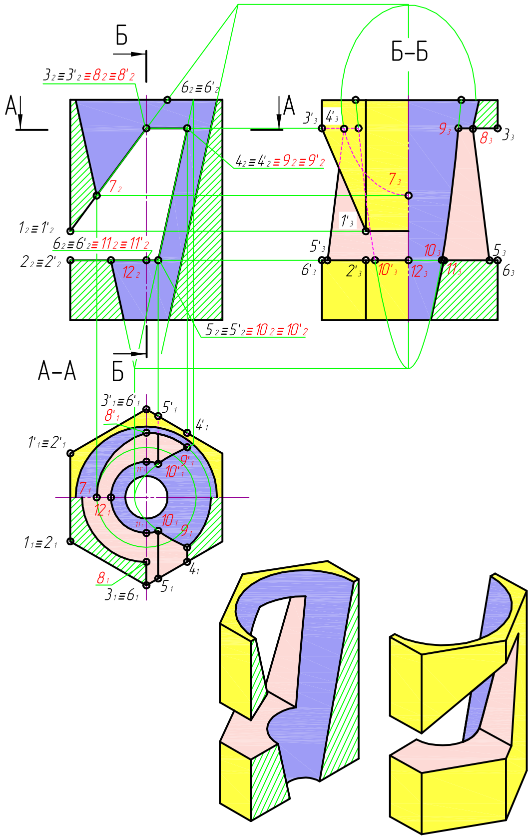


Рис. 8.4.21

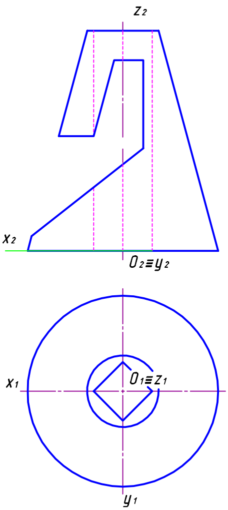


Рис. 8.4.22

Задача 22. Дано геометричне тіло, зовнішня поверхня якого - зрізаний прямий круговий конус, внутрішня поверхня - правильна чотиригранна призма. Конус і призма мають спільну вертикальну вісь. Геометричне тіло перетинається призматичним пазом, який розташований перпендикулярно до $П_2$. Побудувати вид зліва геометричного тіла, лінії перетину геометричного тіла з призматичним пазом та виконати необхідні розрізи (рис. 8.4.22).

Розв'язання

Як і попередня, ця задача розв'язується за допомогою розподілу на зовнішню і внутрішню.

Проаналізуємо: а) зовнішня поверхня - конус, який перетинається з п'ятьма площинами паза (вікна) (рис. 8.4.23). Площини, які включають точки *6, 7* та *5, 4* є паралельними до основ конуса і в перетині з ним дають нам неповні кола. Площина з точками *5, 6* паралельна до однієї твірної і дає дві гілки параболи, площина з точками *4, 3* є паралельною до двох твірних і дає нам дві гілки гіперболи. А площина з точками *1, 2, 3*, яка перетинає всі твірні конуса дає нам еліпс (в нашій задачі - неповний). З'єднуємо з урахуванням видимості всі точки *1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 6′, 5′, 4′, 3′, 2′, 1*.

б) внутрішня поверхня - чотиригранна призма перетинається з площинами паза .

Поєднуємо зовнішню та внутрішню задачі і виконуємо розрізи (рис. 8.4.24).

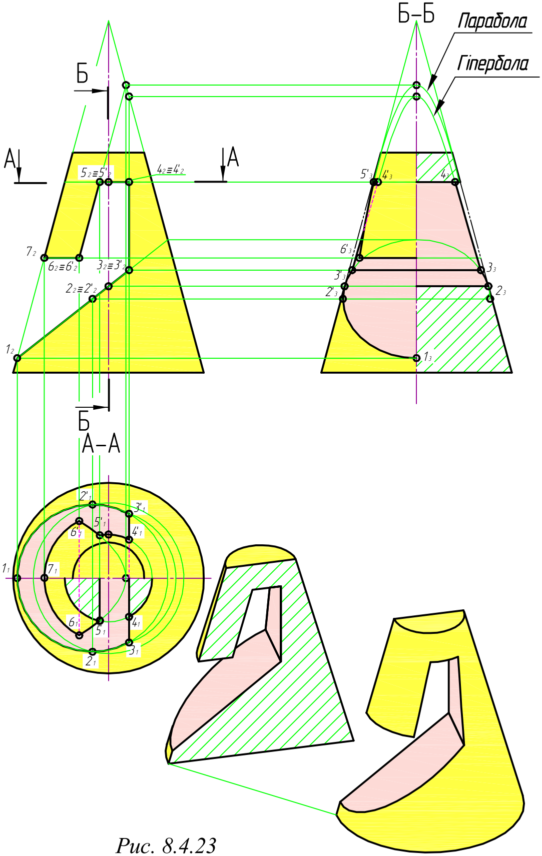


Рис. 8.4.23

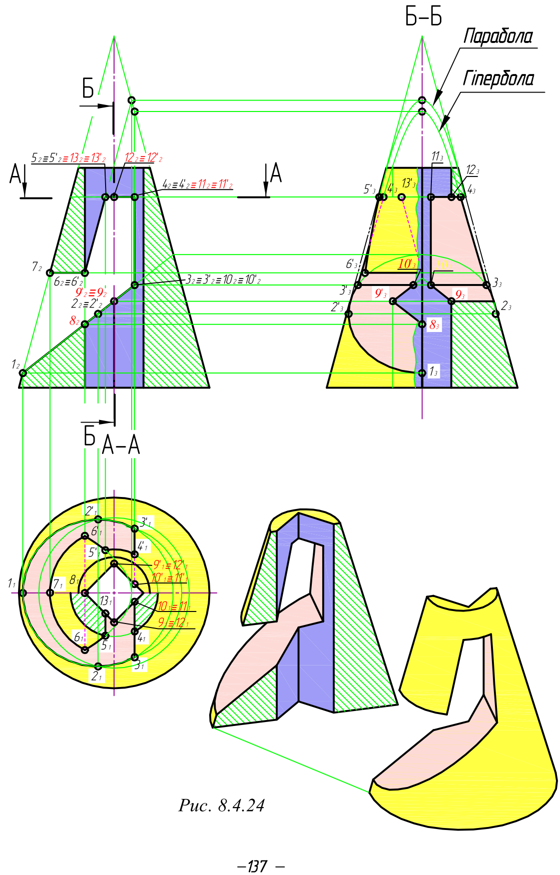


Рис. 8.4.24

8.5 Зображення геометричного тіла складеної форми з двома отворами.

Задача 23. Дано складене геометричне тіло, зовнішня поверхня якого складається зі зрізаної півкулі і зрізаної правильної чотиригранної призми; внутрішня поверхня - циліндр. Вони мають спільну вертикальну вісь. Геометричне тіло перетинається призматичним вікном, яке розташоване перпендикулярно до Π_2 (рис. 8.5.1). Побудувати вид зліва геометричного тіла, лінії перетину геометричного тіла з призматичним вікном і виконати необхідні розрізи.

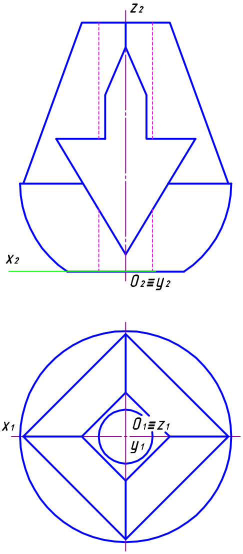


Рис. 8.5.1

Розв'язання

Розв'язуємо задачу за загальною методикою: спочатку зовнішню (рис. 8.5.2), а потім внутрішню задачі, поєднуємо їх і виконуємо розрізи (рис. 8.5.3).

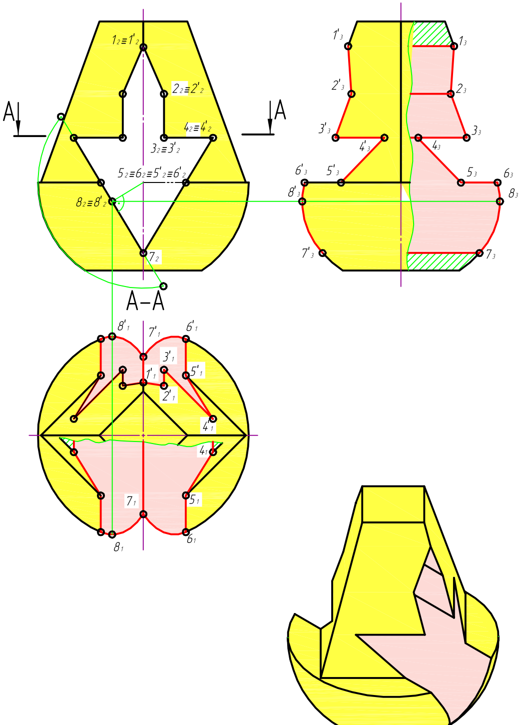


Рис. 8.5.2

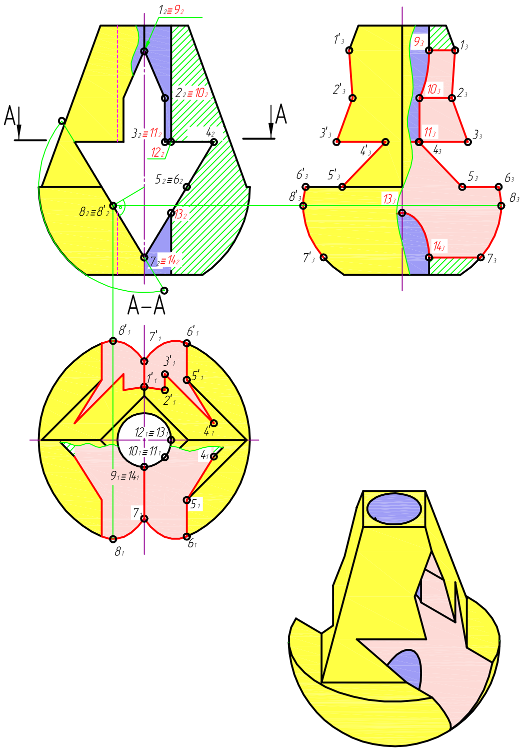
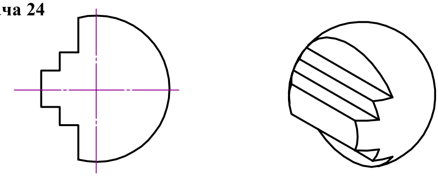


Рис. 8.5.3

Самостійна робота.

Умова до задач: 24-26. Дано:фронтальна проекція сфери зі зрізами та пазами. Побудувати види зверху і зліва, знайти лінії перетину, позначити їх. Виконайте необхідні розрізи.

Задача 24



Задача 25

Рис. 8.5.4

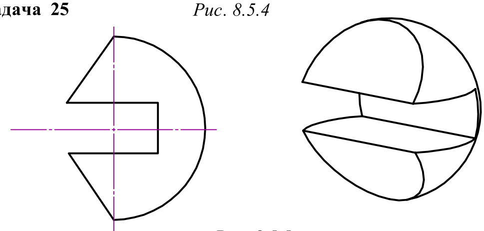


Рис. 8.5.5

Задача 26

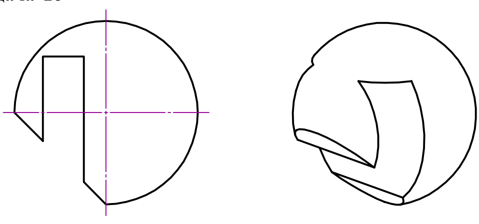


Рис. 8.5.6

Умова до задач 27-30. Дано: дві проекції гранного геометричного тіла. Побудувати його вид зліва, знайти лінії перетину з горизонтальним призматичним отвором. Виконайте необхідні розрізи.

Задача 27

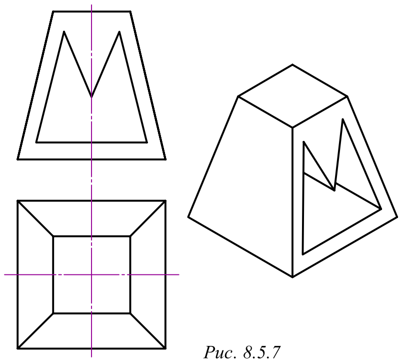


Рис. 8.5.7

Задача 28

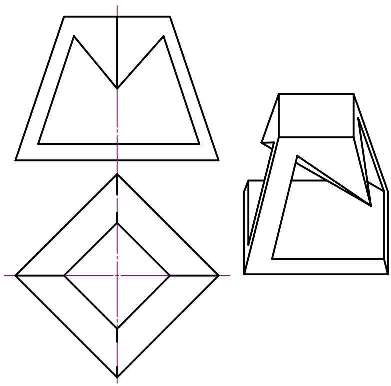


Рис. 8.5.8

Задача 29

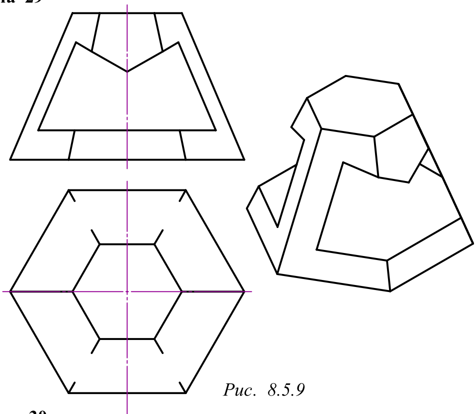


Рис. 8.5.9

Задача 30

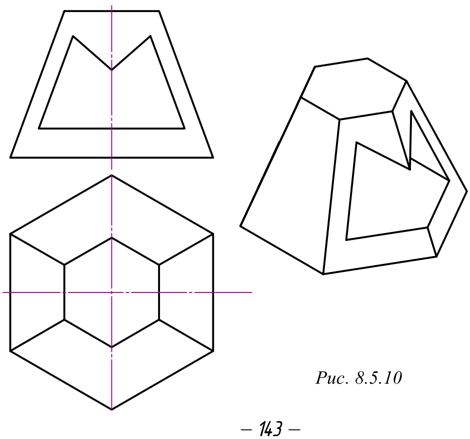
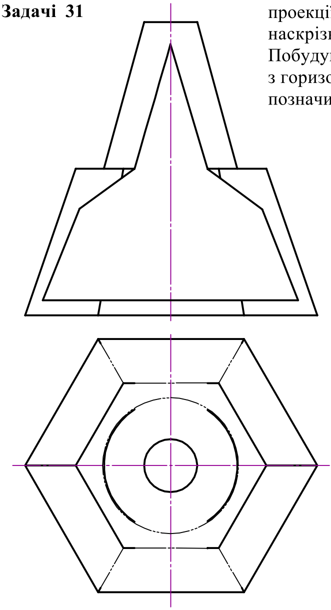


Рис. 8.5.10

Задачі 31

Умови до задач :31-33. Дано: дві проекції складеного геометричного тіла з наскрізним горизонтальним пазом . Побудувати вид зліва геометричного тіла з горизонтальним призматичним вікном, позначити необхідні розрізи.



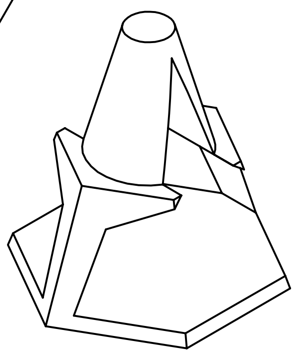


Рис. 8.5.11

Задача 32

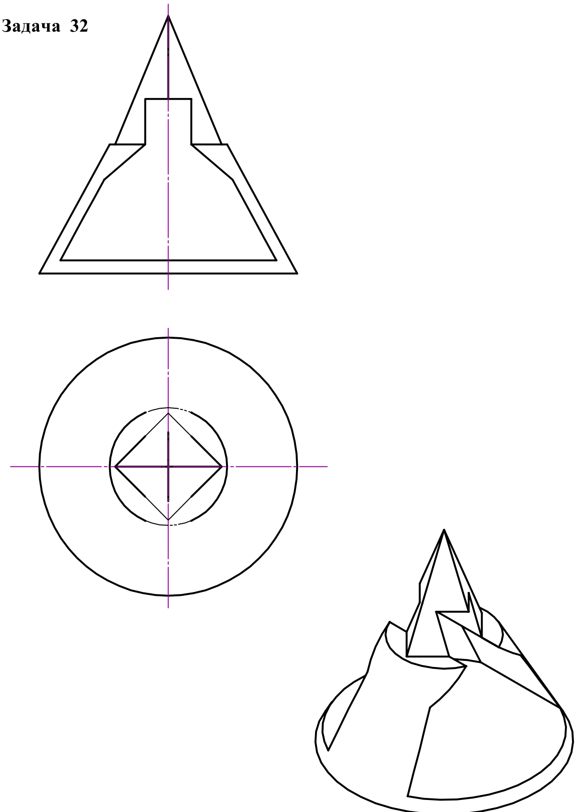


Рис. 8.5.12

Задача 33

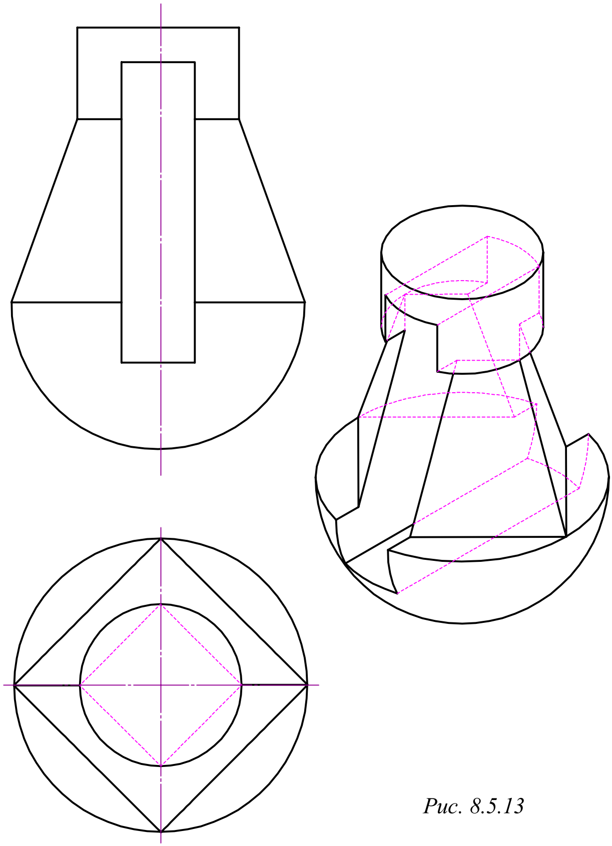
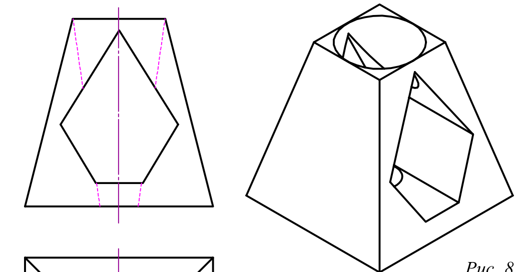


Рис. 8.5.13

Умови до задач 34-37. Дано: дві проекції геометричного тіла з двома отворами . Побудувати вид зліва ,лінії перетину , позначити необхідні розрізи.

Задача 34



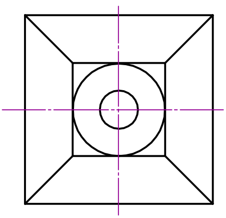
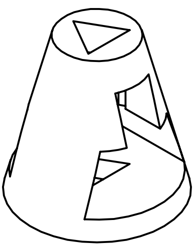


Рис. 8.5.14

Задача 35



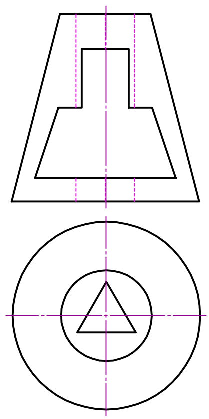
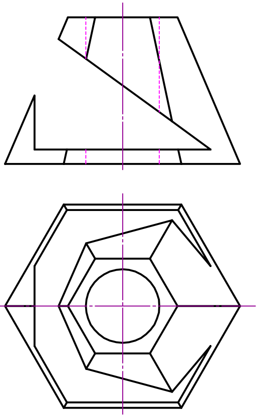


Рис. 8.5.15

Задача 36



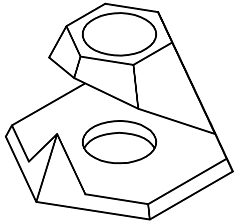
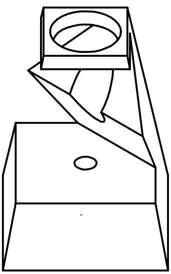


Рис. 8.5.16

Задача 37



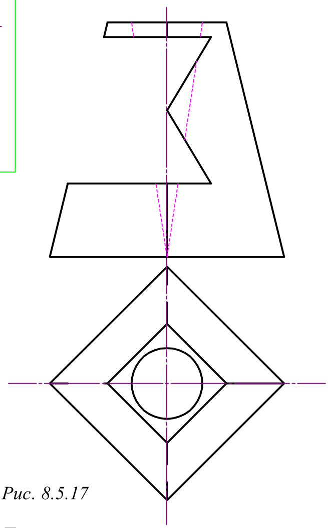
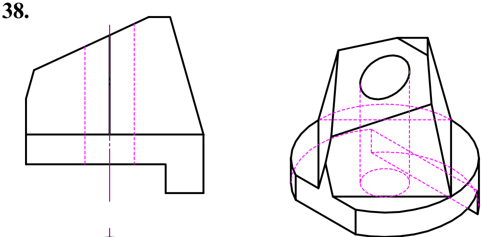


Рис. 8.5.17

Самостійна робота

Умова до задач 38-51. Дано дві проекції складеного геометричного тіла з наскрізним вертикальним отвором (рис. 8.5.18 - 8.5.31). Побудувати вид зліва геометричного тіла, лінію перетину геометричного тіла з площинами зрізу і виконати необхідні розрізи.

Задача 38.



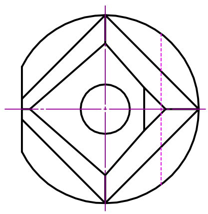
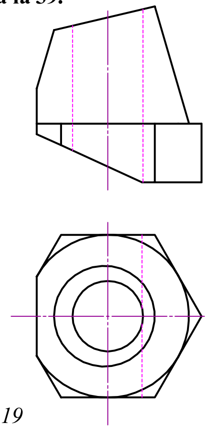


Рис. 8.5.18

Задача 39.



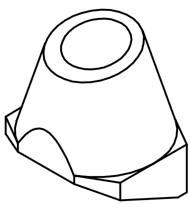


Рис. 8.5.19

Задача 40.

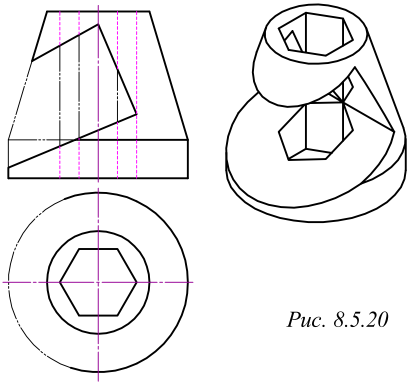


Рис. 8.5.20

Задача 41.

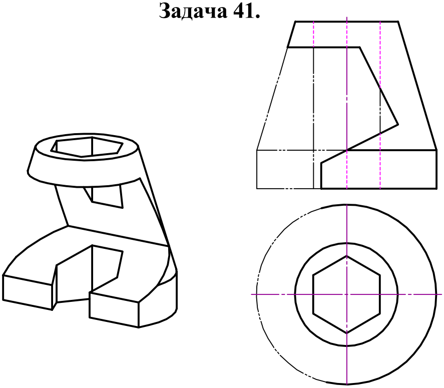


Рис. 8.5.21

Задача 42.

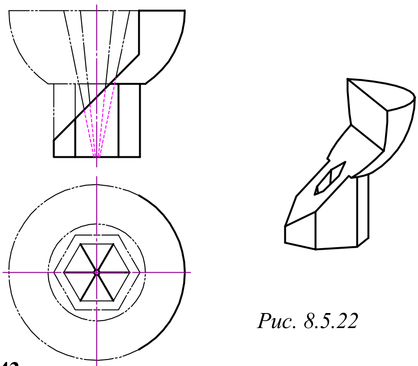


Рис. 8.5.22

Задача 43.

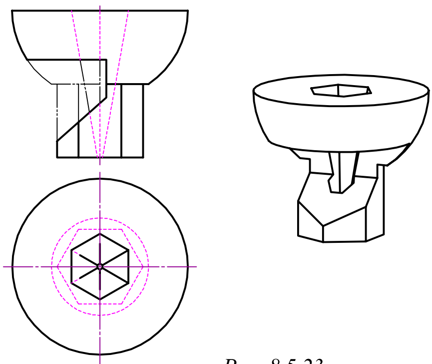


Рис. 8.5.23

Задача 44.

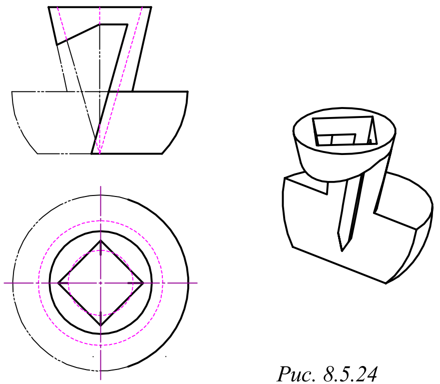


Рис. 8.5.24

Задача 45.

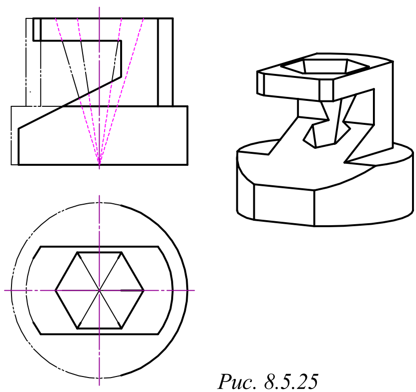
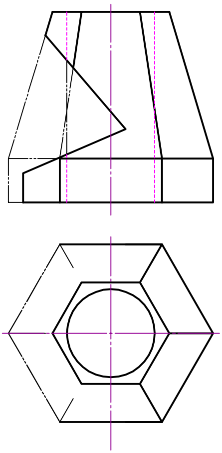


Рис. 8.5.25

Задача 46.



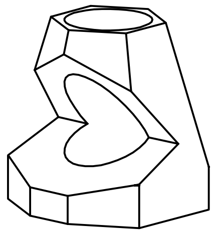
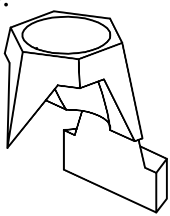
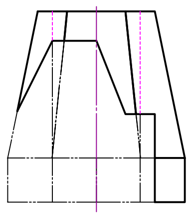


Рис. 8.5.26

Задача 47.





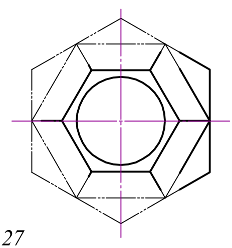


Рис. 8.5.27

Задача 48.

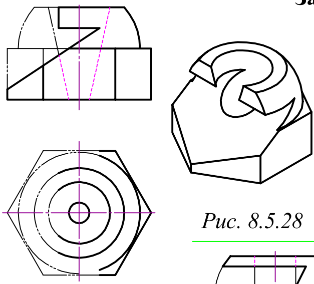


Рис. 8.5.28

Задача 49.

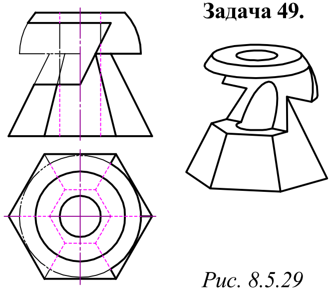


Рис. 8.5.29

Задача 50.

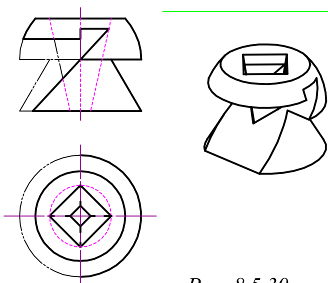


Рис. 8.5.30

Задача 51.

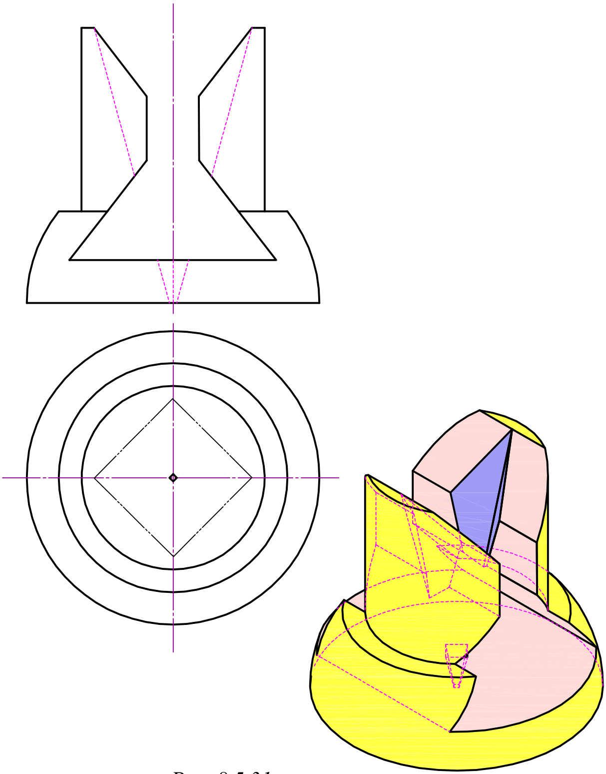


Рис. 8.5.31

Література

1. Інженерна графіка : навч. посіб. / В.В. Ванін [та ін.]. - Київ : BHV, 2009. - 400 с.
2. Інженерна графіка : підручник для студ. вищих навч. закл. / В.Є. Михайленко, В.В. Ванін, С.М. Ковальов ; За ред. В.Є. Михайленка. - Київ : Каравела, 2008. - 272 с.
3. Нарисна геометрія, інженерна та комп'ютерна графіка : навч.-метод. пос. для студ. немеханіч. спец. всіх форм навч. / П.П. Волошкевич, О.О. Бойко, Б.В. Панкевич та інші ; Національний ун-т «Львівська політехніка». - Львів : Львівська політехніка, 2007. - 240 с.
4. Інженерна графіка : Підручник для студ. вищих закл. освіти. / В.Є. Михайленко, В.В. Ванін, С.М. Ковальов ; За ред. В.Є. Михайленка. - К. : Каравела, 2004. - 288 с. : іл.
5. Інженерна та комп'ютерна графіка : Підручник / В. Є. Михайленко, В. В. Ванін, С. М. Ковальов ; За ред. В. Є. Михайленка. - Київ : Каравела, 2004. - 344 с.
6. Інженерна графіка : Підручник для студ. вищ. закл. освіти / В.Є. Михайленко, В.В. Ванін, С.М. Ковальов. - К. : Каравела - Л. : Новий Світ-2000, 2002. - 284 с.
7. Інженерна та комп'ютерна графіка : Підручник для студентів вузів / В. Є. Михайленко, В. М. Найдиш, А. М. Підкоритов, І. А. Скидан ; За ред. В. Є. Михайленка. - Київ : Вища школа, 2001. - 350 с.
8. Сборник задач по курсу начертательной геометрии : Учебное пособие для студентов техн. вузов / В.О.Гордон, Ю.Б.Иванов, Т.Е.Солнцева ; Под ред. Ю.Б.Иванова. - М. : Высшая школа, 2003. - 320 с., : ил.
9. Курс начертательной геометрии : Учебное пособие для студентов техн.вузов / В.О. Гордон, М.А. Семенцов-Огиевский; Под ред.В.О.Гордона. - М. : Высшая школа, 2002. - 272 с.
10. Курс начертательной геометрии : Учебное пособие для студентов техн.вузов / Под ред. В. О. Гордона. - М. : Высшая школа, 2000. - 272с.
11. Сборник задач по курсу начертательной геометрии : Учебное пособие для студентов техн. вузов / В.О.Гордон, Ю.Б.Иванов, Т.Е.Солнцева ; Под ред. Ю.Б.Иванова. - М. : Высшая школа, 2000. - 320с.

12. Навчальний посібник для самостійної роботи студентів при вивченні теми «Розробка робочих кресленників та ескізів деталей» з дисципліни «Інженерна графіка» усіх технічних напрямів підготовки [Електронний ресурс] / НТУУ «КПІ» ; уклад. В. В. Ванін, О. М. Воробйов, А. Є. Ізволенська, Н. А. Пара хіна. - Електронні графічні дані (1 файл: 70 Мбайт). - Київ : НТУУ «КПІ», 2009. - 106 с. - Назва з екрана. - Доступ з мережі університету: .
13. Інженерна графіка [Електронний ресурс] : навчальний посібник для студентів хіміко-технологічного факультету для напрямів підготовки «Хімічна технологія» / НТУУ «КПІ» ; уклад. А. Є. Ізволенська, Д. К. Луданов, Г. С. Подима. - Електронні графічні дані (1 файл: 15 Мбайт). - Київ : НТУУ «КПІ», 2009. - 105 с. - Назва з екрана. - Доступ з мережі університету: .
14. Методичні вказівки для самостійної роботи студентів з теми «Аксонометричні проекції» курсу «Інженерна графіка» для студентів всіх спеціальностей / Укл. Г. Г. Допіра, О. Г. Мітюра. - К.: КПІ, 1993. - 44 с.

ЗМІСТ